Министерство образования и науки Республики Калмыкия

VII республиканская олимпиада учителей математики «КУБ»

Ключи к заданиям (заочный тур)

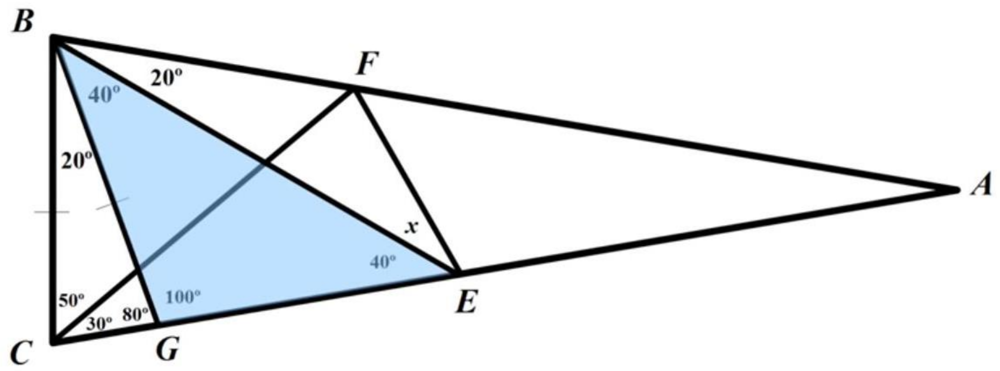
1. **Ответ:** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

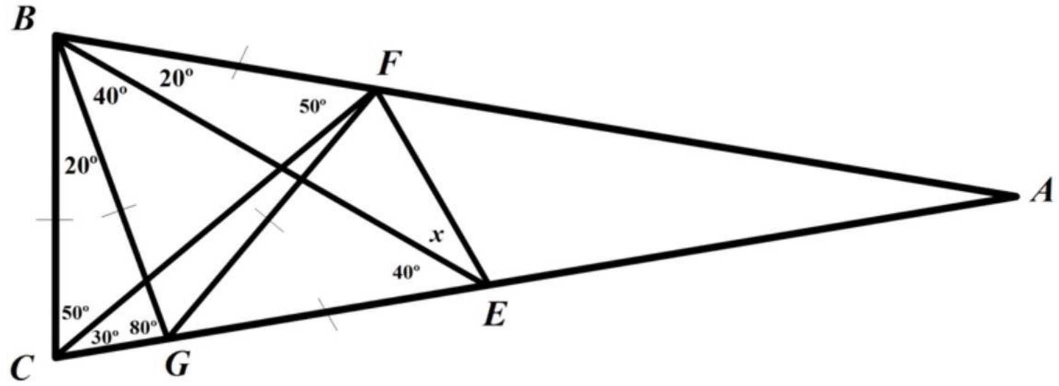
$$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$
$$x-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{x-\frac{1}{x}}$$
$$x^2-2x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}$$
$$x^2-x-2\sqrt{x^2-x}+1=\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2=0$$
$$\sqrt{x^2-x}=1\ \Rightarrow\ x^2-x-1=0\ \Rightarrow\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$
$$x\geqslant 1\ \Rightarrow\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

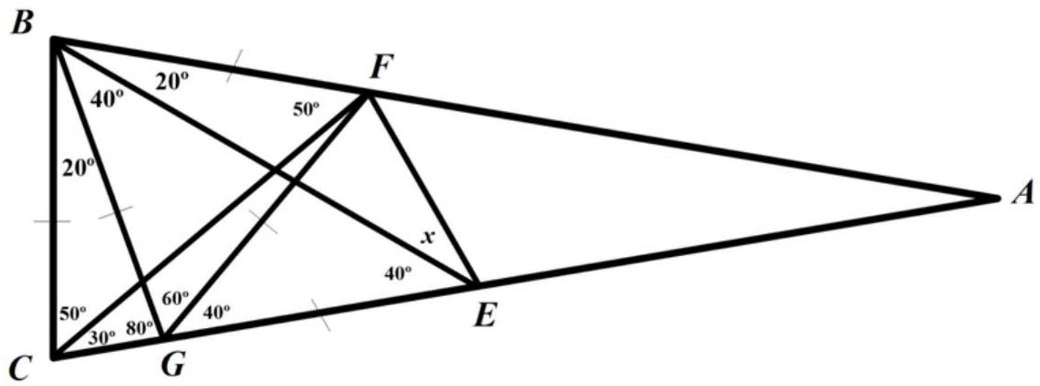
2. **Ответ: 24901.**

$$a^2+2000a=b^2,\ a,\ b\in Z,\ max\,(a)=?$$
$$a^2+2000a+1000^2=b^2+1000^2$$
$$(a+1000)^2-b^2=(a+1000-b)\,(a+1000+b)=1000000$$
$$a+1000-b=x,\ a+1000+b=y,\ xy=1000000,\ x,\ y\in Z$$
$$2\,(a+1000)=x+y\ \Rightarrow\ a+1000=\frac{x+y}{2}\to max,\ x+y\ -\ \text{чётное}\ \Rightarrow\ a+1000=\frac{500000+2}{2}$$
$$\text{следует из графика гиперболы}\ y=\frac{1000000}{x}\ \text{и прямой}\ y=k-x,\ k\to max$$
$$a+1000=250001\ \Rightarrow\ a=249001$$

3. **Ответ: 30^0.** Решение: Обозначим угол BEF = x. Проведем отрезок BG=BC так, чтобы образовался равнобедренный треугольник BCG. Тогда угол BGE = 100^0, и треугольник BGE равнобедренный треугольник, где угол BEG = 40^0. BG=BC=GE. Треугольник BCF – равнобедренный и угол BFC = 50^0. BG=BF. Проведем отрезок GF и получим равносторонний треугольник BCF. Угол BFG = 50^0. GF=GE. Тогда треугольник FGE равнобедренный. Угол FGE = 40^0. Тогда угол GEF = 40^0 + x=70^0. x=30^0.


B
F
A
E
C
G
20°
40°
20°
x
40°
50°
30°
80°
100°


B
F
A
E
C
G
20°
40°
50°
20°
x
40°
50°
30°
80°


B
F
A
E
C
G
20°
40°
50°
20°
x
40°
60°
40°
50°
30°
80°

4. Комментарии к решению:

а) В первом способе допущена грубая ошибка $6^{y^2} \ne (6^y)^2$

б) Во втором способе: предполагают, что обе части ур-я принимают только натуральные значения, а это ниоткуда не следует.

Свое решение:

После замены прологарифмируем обе части ур-я, например по осн. 3

$\log_3(9\cdot 12^y) = \log_3 6^{y^2} \Leftrightarrow 2 + y\log_3 12 = y^2\log_3 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2\cdot(1+\log_3 2) - y\cdot(1+2\log_3 2) - 2 = 0$ (см. кв. ур-е, решим)

$D = (1+2\log_3 2)^2 + 4(1+\log_3 2)\cdot 2 = 4\log_3^2 2 + 12\log_3 2 + 9 = (2\log_3 2+3)^2$

$y_{1,2} = \frac{1+2\log_3 2 \pm (2\log_3 2+3)}{2\cdot(1+\log_3 2)}$ $\quad y_1 = 2;\quad y_2 = \frac{1}{1+2\log_3 2} < 0.$ т.е. $x=4$

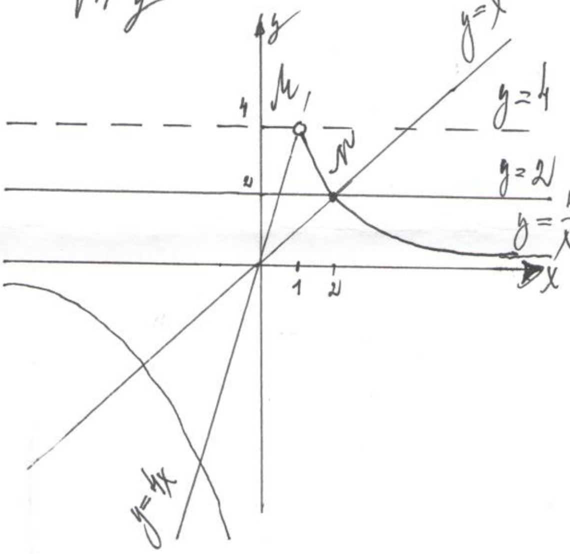
5. Система имеет вид:

$\frac{(y-2)\cdot(xy-4)}{\sqrt{4-y}} = 0$

Реш. будем искать при $4-y>0$, т.е. $y<4$

Строим графики $y=2$ – прямая, $y=\frac{4}{x}$ – гипербола

$y=ax$ – прямая с угл. к. $k=a$, проходит через начало коорд.



Заметим положение графиков при $a=1$ и $a=4$. (пересечение в точках N и M)

Тогда при $y<4$ три пересечения прямой $y=ax$ и графиков $y=2$ и $y=\frac{4}{x}$ будут:

С правой ветвью при $0<a<4$,

с левой ветвью $a>0$.

Учитываем пол-е при $a=1$

Ответ: $0<a<1$; $1<a<4$.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений..
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.