22.08.2019 **очный тур**

VII республиканская олимпиада учителей математики «КУБ»

1 модуль «Малая олимпиада»

1. Все целые числа выписаны подряд, начиная от единицы. Какая цифра стоит на 2019-м месте?
2. Вычислите интеграл $\int_0^1 (-1)^x dx$

2 модуль «Марафон ГИА»

3. В июле взяли кредит в банке на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на *x*% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
Найдите *x*, если известно, что за весь период выплатили на 15% больше, чем взяли в кредит.
4. Найдите сумму целых значений параметра *a*, при которых множество решений неравенства $x(x-6) \geq (a+3)(|x-3|-3)$ содержит все члены некоторой геометрической прогрессии с первым членом, равным 4, и знаменателем $-3 < q < -1$.

3 модуль «Методический блок»

5. **Оцените приведенное ниже решение задачи. Укажите все ошибки и недочеты и, если они есть, доведите предложенную идею до верного рассуждения.**

Задача. Найдите все трехзначные числа с различными цифрами, которые в 5 раз меньше, чем сумма всех остальных трехзначных чисел, полученных перестановкой цифр данного числа.

Решение. Пусть $x = \overline{abc}$ — искомое число, тогда перестановками его цифр можно составить еще пять трехзначных чисел. Сумма всех этих шести чисел равна $222(a+b+c)$. Согласно условию, $x = \frac{222(a+b+c)-x}{5}$, откуда $x = 37(a+b+c)$, т.е., $100a+10b+c = 37(a+b+c)$ или $7a = 3b+4c$. Переписав последнее равенство в виде $7(a-c) = 3(b-c)$, заметим, что $b-c$ делится на 7. Значит, для пары $(b;c)$ возможны только 4 значения: (1; 8), (8; 1), (2; 9) и (9; 2). Соответствующие значения *a* равны 5, 6, 4 и 5. Таким образом, искомые числа 518, 629, 481 и 592.

6. **Решите геометрическую задачу 2 различными способами, которые используют различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики**.
В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 72 см и высотой 63 см точка E лежит на ребре AD таким образом, что CE является биссектрисой треугольника ACD. Найдите расстояние от точки E до плоскости B_1CD_1.

4 модуль «УДЕ»

7. **Решите задачу:**
а) Из двух пунктов А и В вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 км. Сколько км останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?
б) Составьте и решите обратную задачу.
8. **Задача Шарыгина:**
а) Один из углов треугольника равен 120^0. Докажите, что треугольник, образованный основаниями биссектрис данного треугольника, — прямоугольный.
б) С помощью координатного метода проведите расчетную проверку пункта а) для треугольника со сторонами 6 см,6 см, $6\sqrt{3}$ см.

Желаем удачи!