Решения

1.

Решите уравнение $10x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0$.

Ответ: $x = -\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}}$.

Решение 1. Данное уравнение можно переписать в виде $2x^3 + (2x+1)^3 = 0$, поэтому $x\sqrt[3]{2} = -2x - 1$, откуда $x = -\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}}$.

Решение 2. Сделав замену переменной $x = \frac{1}{y}$, получаем $y^3 + 6y^2 + 12y + 10 = 0$. Еще одна замена $y = z - 2$ приводит к уравнению $z^3 + 2 = 0$, откуда $z = -\sqrt[3]{2}$, $y = -2 - \sqrt[3]{2}$, $x = -\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}}$.

2.

Обозначим: $[x] = a$, $\{x\} = b$, тогда $x = a + b$.
Данное неравенство примет вид: $ab < a + b - 1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) < 0$.
Так как $0 \le \{x\} < 1$, то $b < 1$. Тогда $a > 1$, то есть $[x] > 1$. Следовательно, $x \ge 2$.

3.

Пусть $\overline{aabb}$ – искомое четырехзначное число, где $1 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$. Из равенства $1000a+100a+10b+b = 11(100a+b)$ и так как данное число является квадратом, следует, что число $100a+b$ делится на 11. Следовательно, число $a+b$ делится на 11, а так как $1 \le a + b \le 18$, то $a+b = 11$. Кроме того, так как данное число является квадратом, то число b может принимать только значения 0,1,4,5,6,9. Значения 0,1 невозможны в силу условий на a и b. Для оставшихся значений $b = 4,5,6$ или 9 находим, что $a = 11 - b = 7,6,5$ или 2 и значит $100a+b = 704, 605, 506$ или 209. Умножая каждое из полученных чисел на 11, находим, что только число $704 \bullet 11 = 7744 = 88^2$ удовлетворяет условиям задачи. Ответ: 7744

4.

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\frac{1}{5x-12}+\frac{2x^2-6x+1}{x-3}\ge 2x;\ \frac{1}{5x-12}+\frac{2x(x-3)}{x-3}+\frac{1}{x-3}\ge 2x;\ \frac{2x-5}{(5x-12)(x-3)}\ge 0.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $\frac{12}{5}<x\le\frac{5}{2}$; $x>3$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\log_{x+1}(2x+7)\cdot\log_{x+1}\frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4}\le -2;$$

$$\log_{x+1}(2x+7)\cdot\log_{x+1}\frac{(2x+7)(x+1)}{(x+1)^4}\le -2;$$

$$\log_{x+1}(2x+7)\cdot\left(\log_{x+1}(2x+7)-3\right)\le -2.$$

Пусть $t=\log_{x+1}(2x+7)$, тогда неравенство примет вид: $t(t-3)\le -2$; $t^2-3t+2\le 0$, откуда $1\le t\le 2$; $1\le\log_{x+1}(2x+7)\le 2$.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<x+1<1$.

$$\log_{x+1}(2x+7)\ge 1;\ \begin{cases}2x+7\le x+1,\\2x+7>0;\end{cases}\ \begin{cases}x\le -6,\\x>-\frac{7}{2};\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

В этом случае второе неравенство исходной системы не имеет решений.
Второй случай: $x+1>1$.

$$\begin{cases}\log_{x+1}(2x+7)\ge 1,\\\log_{x+1}(2x+7)\le 2,\\x+1>1;\end{cases}\ \begin{cases}2x+7\ge x+1,\\2x+7\le (x+1)^2,\\x>0;\end{cases}\ \begin{cases}x\ge -6,\\x^2-6\ge 0,\\x>0,\end{cases}\ \text{откуда } x\ge\sqrt{6}.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\ge\sqrt{6}$.

3. Поскольку $\frac{12}{5}<\sqrt{6}<\frac{5}{2}$, получаем решение исходной системы неравенств: $\sqrt{6}\le x\le\frac{5}{2}$; $x>3$.

Ответ: $\left[\sqrt{6};\frac{5}{2}\right]$; $(3;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

5.

Решение.

Возможны два случая. Первый случай: точки D и Q лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CP (рис. 1), тогда $\angle PQC = 180° - \angle PDC$.

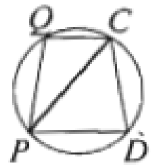


Рис. 1

В треугольниках PQC и PDC

$$PC^2 = PQ^2 + QC^2 - 2 \cdot PQ \cdot QC \cdot \cos\angle PQC = 160 + 96 \cdot \cos\angle PDC;$$

$$PC^2 = PD^2 + DC^2 - 2 \cdot PD \cdot DC \cdot \cos\angle PDC = 288 - 288 \cdot \cos\angle PDC,$$

откуда $\cos\angle PDC = \frac{1}{3}$; $PC = 8\sqrt{3}$.

Второй случай: точки D и Q лежат в одной полуплоскости относительно прямой CP (рис. 2), тогда $\angle PQC = \angle PDC$.

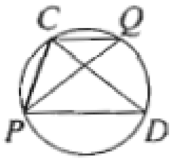


Рис. 2

В треугольниках PQC и PDC

$$PC^2 = PQ^2 + QC^2 - 2 \cdot PQ \cdot QC \cdot \cos\angle PQC = 160 - 96 \cdot \cos\angle PDC;$$

$$PC^2 = PD^2 + DC^2 - 2 \cdot PD \cdot DC \cdot \cos\angle PDC = 288 - 288 \cdot \cos\angle PDC,$$

откуда $\cos\angle PDC = \frac{2}{3}$; $PC = 4\sqrt{6}$.

Ответ: $4\sqrt{6}$ или $8\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

6.

Решение.

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x = 0$ в исходное уравнение:

$(a+7)^2 = 2|a+7|$; $|a+7|\cdot(|a+7|-2) = 0$, откуда либо $|a+7| = 0$; $a = -7$, либо $|a+7| = 2$; $a = -5$ или $a = -9$.

При $a = -7$ исходное уравнение принимает вид: $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа -2; 0 и 2, то есть исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a = -5$ и при $a = -9$ уравнение принимает вид: $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \le x \le 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $a = -5$ и при $a = -9$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: -9; -5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения a, но в ответ включено не более одного постороннего значения a	3
Обоснованно получено одно из значений a	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

7.

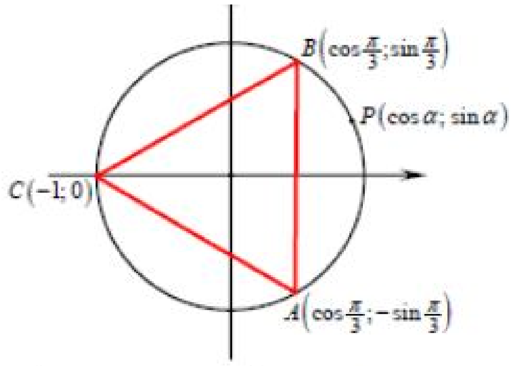
Пусть объем озера a литров, ключи за день добавляют x литров, а слон за день выпивает p литров, за k дней 1 слон выпивает озеро, тогда можем составить систему уравнений

$$\begin{cases} a + x = 183p \\ a + 5x = 5 \cdot 37p \\ a + kx = kp \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем 4x = 2p или p = 2x. Из первого и третьего уравнений имеем (k − 1) x = (k − 183) p или (k − 1) x = (k − 183) 2x, отсюда получим k = 365.

Замечание. Выпитое полностью озеро заполнится вновь за два года.

8.



Решение 1. Не теряя общности можно положить радиус описанной около треугольника окружности равным 1. Расположим треугольник ABC так, чтобы его вершинами были точки $A\left(\cos\frac{\pi}{3};-\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\cos\frac{\pi}{3};\sin\frac{\pi}{3}\right)$ и $C(-1;0)$. Тогда $P(\cos\alpha;\sin\alpha)$, где $|\alpha|\le\frac{\pi}{3}$ (см. рисунок).

Далее имеем:

$$PC=\sqrt{(\cos\alpha+1)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2+2\cos\alpha}=\cos\frac{\alpha}{2},\ PA=\sqrt{2-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right),$$

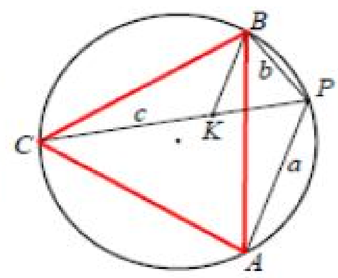
$$PB=\sqrt{\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\right)^2}=\sqrt{2-2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Осталось заметить, что $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}$.

Тема: «Метод координат».

Решение 2. Положим $a=PA$, $b=PB$ и $c=PC$. Так как $\angle APC=\angle BPC=60^\circ$, то, согласно теореме косинусов, получаем $c^2+a^2-ac=AC^2=BC^2=c^2+b^2-bc$, откуда $c^2+a^2-ac=c^2+b^2-bc \Leftrightarrow (a-b)(a+b)-c(a-b)=0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-c)=0$. Если $a\ne b$, то $a+b=c$. Если $a=b$, то PC — диаметр $2R$ данной окружности, а $PA=PB=R$, т.е. и в этом случае $a+b=c$.

Тема: «Вписанный угол; теорема косинусов».



Решение 3. Рассмотрим точку K отрезка PC, такую, что $PK=PB$ (см. рисунок). Так как $\angle BPK=60^\circ$, то треугольник BPK — равносторонний, в частности, $BK=BP$ и $\angle PBK=60^\circ$. Следовательно, при повороте на угол 60° вокруг точки B точка P перейдет в точку K. Поскольку при этом повороте точка A переходит в точку C, то отрезок PA перейдет в отрезок KC, откуда $PA=KC$. Поэтому $CP=CK+KP=PA+PB$.

Тема: «Геометрические преобразования».

Решение 4. Установим связь с другой известной задачей. Найдем множество точек, суммы квадратов расстояний от которых до трех данных точек $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;\ y_3)$ постоянна. Это множество задается уравнением

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=q.$$

Преобразуя его, получаем уравнение

$$3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y=q_1,$$

или уравнение $\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2=q_3$, задающее при $q_3>0$ окружность с центром в точке пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;\ y_3)$. Пусть d — длина стороны треугольника. Тогда, в обозначениях, принятых нами в приведенном выше **решении 2**, имеем $a^2+b^2+c^2=PA^2+PB^2+PC^2=CA^2+CB^2+CC^2=2d^2$. Поскольку, согласно теореме косинусов $d^2=a^2+b^2+ab$, то $c^2=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$, откуда $a+b=c$.

Тема: «Метод координат. Уравнение окружности».

9.

Доказательство 1. Не теряя общности можно считать, что вершина A совпадает с началом координат — точкой O. Пусть две другие вершины имеют координаты $B(x_1;y_1;z_1)$ и $C(x_2;y_2;z_2)$.

Воспользовавшись формулой для вычисления скалярного произведения векторов

$$|\overline{OB}||\overline{OC}|\cos\angle BOC = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

получаем:

$$4S_{OBC}^2 = OB^2\cdot OC^2\sin^2\angle BOC = OB^2\cdot OC^2 - OB^2\cdot OC^2\cos^2\angle BOC =$$
$$=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 =$$
$$=(x_1y_2-x_2y_1)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2. \qquad (*)$$

Проекциями точек B и C на плоскость Oxy являются точки $B_1(x_1;y_1;0)$ и $C_1(x_2;y_2;0)$. Подставив их координаты в найденную формулу, получим, что $2S_{OB_1C_1} = |x_1y_2 - x_2y_1|$. Таким образом, мы нашли площадь проекции треугольника на координатную плоскость Oxy. Аналогичным образом получаем, что удвоенная площадь проекций данного треугольника на координатные плоскости Oyz и Oxz равна соответственно $|y_1z_2 - y_2z_1|$ и $|z_1x_2 - z_2x_1|$.

Таким образом, в правой части формулы (*) стоит учетверенная сумма квадратов площадей проекций данного треугольника на координатные плоскости.

Доказательства 2 и 3. Обозначим через α, β и γ углы, которые плоскость треугольника ABC образует, соответственно, с координатными плоскостями Oyz, Oxz и Oxy. Пусть S — площадь треугольника ABC, а S_{xy}, S_{yz} и S_{xz} — площади его проекций на координатные плоскости Oxy, Oyz и Oxz, соответственно. В силу теоремы о площади проекции плоской фигуры, справедливы следующие равенства $S_{xy} = S\cos\gamma$, $S_{yz} = S\cos\alpha$ и $S_{xz} = S\cos\beta$.

Таким образом, нам достаточно доказать тождество $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, что мы и сделаем двумя различными способами.

Способ 1. Пусть $\overline{OM}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости треугольника ABC. Углы, которые прямая OM образует с осями координат, равны α, β и γ. Таким образом, вектор $\overline{OM}$ имеет координаты $\{\pm\cos\alpha;\pm\cos\beta;\pm\cos\gamma\}$. Но в любом случае сумма их квадратов есть квадрат длины единичного вектора, т.е. равна 1.

Способ 2. Обозначим через P, Q и R точки пересечения плоскости треугольника ABC с осями координат. Пусть H — проекция начала координат на эту плоскость. Имеем, $S_{PQH} = S_{PQO}\cos\gamma = S_{PQR}\cos^2\gamma$. Аналогичным образом, $S_{PRH} = S_{PQR}\cos^2\beta$ и $S_{QRH} = S\cos^2\alpha$. Осталось заметить, что $S_{PQR} = S_{PQH} + S_{PRH} + S_{QRH} = S_{PQR}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$, откуда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.