IV республиканская олимпиада учителей математики «КУБ»

Ключи к заданиям

1. Воспользуемся следующим тождеством: (x – y)3 + (y – z)3 + (z – x)3 = 3(x – y)(y – z)(z – x).Тогда исходное уравнение можно записать в виде (x – y)(y – z)(z – x) = 10. Обозначим a = x – y, b = y – z, c = z – x и запишем полученное равенство в виде abc = 10. Кроме того, очевидно, a + b + c = 0. Легко убедиться, что с точностью до перестановки из равенства abc = 10 следует, что числа |a|, |b|, |c| равны либо 1, 2, 5, либо 1, 1, 10. Но во всех этих случаях при любом выборе знаков a, b, c сумма a + b + c отлична от нуля. Таким образом, исходное уравнение не имеет решений в целых числах.
2. Построим треугольник ABC. Построим BD=4. Опустим высоту BH. Треугольник BDC – равнобедренный. Пусть DH=HC=x. Тогда $AH^2+BH^2=(5-x)^2+16=AB^2$.
   x=0,5. AD=4. Значит угол C в два раза больше угла A.
   Существуют и другие способы решения.
3. **Решение**. Пусть *M* – середина *BC*, $\angle BNE = \angle CND = x$. Докажем, что $KM \perp BC$. Можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Пусть B_1 и C_1 – середины гипотенуз *NE* и *ND* прямоугольных треугольников с вершинами прямых углов *B* и *C* соответственно (см. рис. 3а). Тогда $BB_1 = \frac{1}{2}NE = C_1K$ и $CC_1 = \frac{1}{2}ND = B_1K$. Заметим, что $\angle BB_1E = 2x$ и $\angle CC_1D = 2x$ (внешние углы равнобедренных треугольников). Кроме того, $\angle KB_1E = \angle KC_1D$, поэтому $\angle BB_1K = \angle CC_1K$. Таким образом, равны треугольники BB_1K и CC_1K, следовательно, *KB* = *KC*, тогда $KM \perp BC$.

<u>Второй способ</u>. Обозначим углы *B* и *C* треугольника *AB*C через β и γ соответственно,. Пусть *D*' и *E*' – проекции точек *D* и *E* на *BC* (см. рис. 3б). Из прямоугольных треугольников получим: $BE' = BE\cdot\cos\beta = BN\cdot \mathrm{tg}x\cos\beta$ и $CD' = CD\cdot\cos\gamma = CN\cdot\mathrm{tg}x\cos\gamma$. Из треугольника *BNC* по теореме синусов: $\frac{BN}{CN} = \frac{\sin\angle BCN}{\sin\angle CBN} = \frac{\sin(90^\circ-\gamma)}{\sin(90^\circ-\beta)} = \frac{\cos\chi}{\cos\beta}$, то есть $BN\cdot\cos\beta = CN\cdot\cos\gamma$. Следовательно, *BE*' = *CD*', значит, *M* – середина *D*'*E*', то есть $KM \perp BC$.

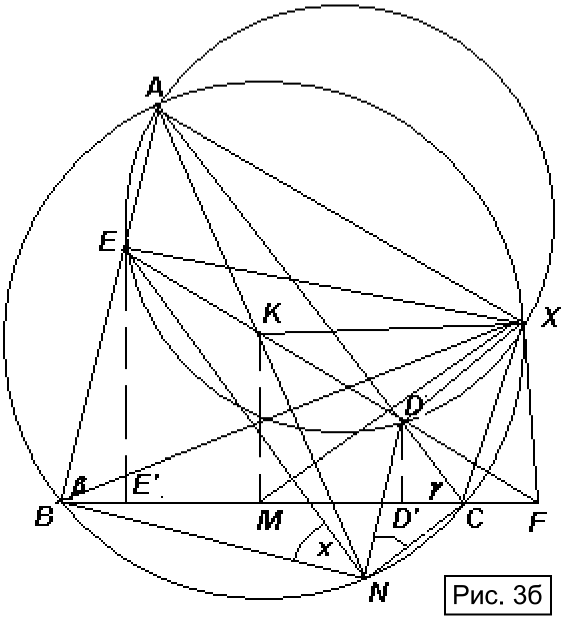

Рис. 3б

Докажем теперь, что точки *K*, *M*, *F* и *X* лежат на одной окружности, откуда и будет следовать утверждение задачи (см. рис. 3б).

Действительно, без ограничения общности можно считать, что точка *X* лежит на дуге *AC*. Тогда $\angle XED = \angle XAC = \angle XBC$. Следовательно, $\angle XDE = \angle XCB$, поэтому треугольники *XBC* и *XED* подобны. Тогда подобны и треугольники *XÌC* и *XKD*, значит, $\angle XKF = \angle XKD = \angle XMC = \angle XMF$, откуда и следует требуемое утверждение.

Существуют и другие способы решения.

<u>Критерии проверки</u>.

Полное обоснованное решение – 3балла

Доказано только, что $KM \perp BC$ – 2балла

Задача не решена, но в работе есть разумные «продвижения» – 1 балл

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

4. Ответ: 3 ч, 5 ч, 6 ч.

Решение. Пусть x, y и z часов – время, за которое каждый из землекопов может вырыть траншею. По условию: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{10}$, x, y и z – натуральные числа, меньшие, чем 24. Без ограничения общности можно считать, что $x < y < z$, тогда $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}>\frac{1}{z}$. Следовательно, $\frac{3}{x}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{10}$, поэтому $x < \frac{30}{7}$, то есть $x \le 4$. Учитывая, что $x > 1$, достаточно рассмотреть три случая.

1) Пусть $x = 2$, тогда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{5}$. Выразив y, получим: $y = 5 + \frac{25}{z-5}$. Так как $\frac{25}{z-5}\in N$, то $z = 6$; 10; 30. Если $z = 6$, то $y = 30 > 24$, если $z = 10$, то $y = 10 = z$, а $z = 30 > 24$.

Таким образом, этот случай невозможен.

2) Пусть $x = 3$, тогда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{30}$. Так как $\frac{2}{y}>\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{30}$, то $y < \frac{60}{11}$. Учитывая, что $y > x$, получим, что $y = 4$ или $y = 5$.

Если $y = 4$, то $z = \frac{60}{7}\notin N$. Если $y = 5$, то $z = 6$, значит, (3; 5; 6) является решением.

3) Пусть $x = 4$, тогда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{9}{20}$. Так как $\frac{2}{y}>\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{9}{20}$, то $y < \frac{40}{9}$, то есть $y \le 4$. С другой стороны, $y > x$. Таким образом, в этом случае решений нет.

Критерии проверки. Приведено полное обоснованное решение – 3 балла.
Верный ответ получен путем неполного перебора – от 2 балла.
Приведен только верный ответ – 1 балл.

5. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Первый способ. Заметим, что объем тетраэдра $EAD'C$ есть разность объемов данного параллелепипеда и четырех пирамид: $ADCD'$, $ABCE$, $AA'D'B'E$ и $CC'D'B'E$. Вычислим их объемы (см. рис. 3а): 1) $V_{A...D'} = AB\cdot AD\cdot AA' = 2\sqrt{3}$; 2) $V_{ADCD'} = \frac{1}{6}AD\cdot DC\cdot DD' = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $V_{ABCE} = \frac{1}{6}AB\cdot BC\cdot CE = \frac{\sqrt{3}}{6}$; 4) $V_{AA'D'B'E} = \frac{1}{3}S_{AA'B'E}\cdot D'A' = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $V_{CC'D'B'E} = \frac{1}{3}S_{B'C'CE}\cdot D'C' = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $V_{EAD'C} = 2\sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

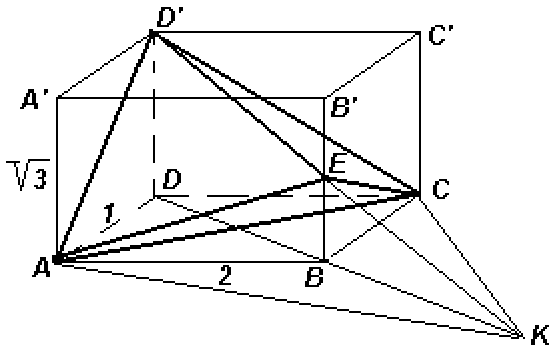

Рис. 3а

Второй способ. Пусть прямая $D'E$ пересекается с прямой DB в точке K (см. рис. 3а), тогда $V_{EAD'C} = V_{KAD'C} - V_{EACK} = \frac{1}{3}S_{\Delta ACK}\cdot DD' - \frac{1}{3}S_{\Delta ACK}\cdot EB = \frac{1}{6}S_{\Delta ACK}\cdot AA'$.

Найдем площадь треугольника ACK. Пусть O – точка пересечения AC и BD, тогда $S_{\Delta ACK} = 2S_{\Delta AOK} = OK\cdot AH$, где AH – перпендикуляр, опущенный из вершины A на диагональ BD (см. рис. 3б). Так как $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{5}$; $AH=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

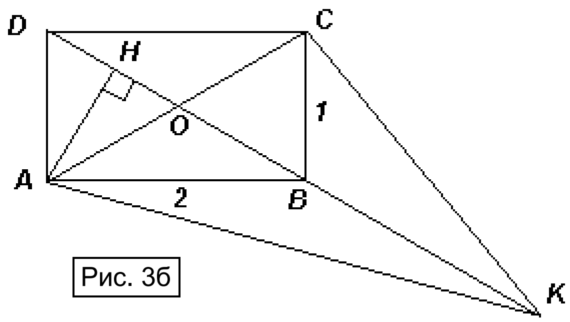

Рис. 3б

; $OK = \frac{3}{2} BD = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, то $S_{\Delta ACK} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$. = 3. Следовательно,

$V_{EAD'C} = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

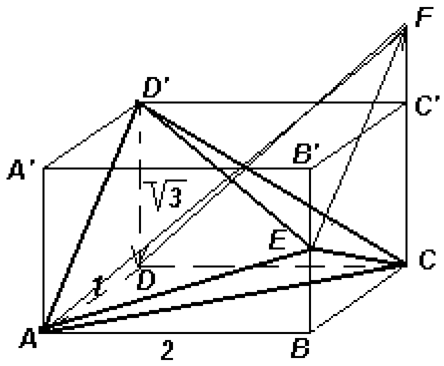

Рис. 3в

Третий способ. Заметим, что объем тетраэдра не изменится, если одну из его вершин переместить параллельно противолежащей грани.

Через точку *E* проведем прямую, параллельную *AD*', которая пересечет *CC*' в точке *F* (см. рис. 3в). Тогда *EF* || *AD'C*, поэтому $V_{EAD'C} = V_{FAD'C} = V_{FADC}$, так как *DD*' || *AFC*.

$$V_{FADC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ACD} \cdot FC = \frac{1}{6} AD \cdot DC \cdot FC = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Критерии проверки. Приведено полное обоснованное решение – 3 балла. Верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка – 2 балл

6.

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 7\log_9\left(x^2-x-6\right) \le 8 + \log_9 \dfrac{(x+2)^7}{x-3}, \\ \dfrac{1}{3^{x-1}} + \dfrac{1}{3^x} + \dfrac{1}{3^{x+1}} < 52. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\begin{cases} \log_9 \dfrac{\left(x^2-x-6\right)^7(x-3)}{(x+2)^7} \le 8 \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9 (x-3)^8 \le 8, \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^8 \le 9^8, \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 \le 9^2, \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-12)(x+6) \le 0, \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \le x < -2, \\ 3 < x \le 12. \end{array}\right.$$

Решим второе неравенство системы:

$$\frac{1}{3^{x+1}}(9+3+1) < 52 \Leftrightarrow \frac{13}{3^{x+1}} < 52 \Leftrightarrow 3^{x+1} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x+1 > \log_3 \frac{1}{4} \Leftrightarrow x > -1 - \log_3 4.$$

Пересечём полученные решения. Учитывая, что $-6 < -1 - \log_3 4 < -2$ решение системы неравенств: $(-1-\log_3 4;\ -2) \cup (3;\ 12]$.

Ответ: $(-1-\log_3 4;\ -2) \cup (3;\ 12]$.

7. Пусть в фирме работало N сотрудников, а фонд составлял S рублей. Средняя зарплата S/N. После увольнения средняя зарплата станет 6S/5N, фонд составит 4S/5. Значит сотрудников должно быть $\frac{4S}{5} : \frac{6S}{5N} = \frac{2}{3} N$. Таким образом надо уволить 1/3 сотрудников. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 1 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-1 балла).

8. а) Теорема может быть доказана путём сравнения площадей треугольников. Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний треугольник, в котором h — это высота, и s — длина каждой из сторон. Точка P выбирается произвольно внутри треугольника, и тогда l, m, n — расстояния от точки P до сторон треугольника. Тогда площадь $\triangle ABC$ будет складывается следующим образом:

$$S(\triangle ABC) = S(\triangle ABP) + S(\triangle ACP) + S(\triangle BCP),$$

из чего вытекают следующие соотношения:

$$\frac{sh}{2} = \frac{s\ell}{2} + \frac{sm}{2} + \frac{sn}{2},$$

то есть:

$$h = \ell + m + n.$$

б) Сумма расстояний от произвольной точки внутри правильного тетраэдра до его граней равна высоте тетраэдра.
по аналогии сумма объемов четыре пирамид равна объему тетраэдра

$$\frac{sh}{3} = \frac{sx}{3} + \frac{sy}{3} + \frac{sz}{3} + \frac{st}{3}$$

h=x+y+z+t

9. а)

$$\begin{cases} n + (n-1) > n+1 - \text{неравенство.треугольника} \\ n^2 + (n-1)^2 < (n+1)^2 - \text{неравенство.тупоугольного.треугольника} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n > 2 \\ n^2 + n^2 - 2n + 1 < n^2 + 2n + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n > 2 \\ n^2 - 4n < 0 \end{cases} \Rightarrow n=3$$

б)

$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$$
$$n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1$$
$$n^2 - 4n = 0$$
$$b = n = 4; a = n-1 = 3, c = n+1 = 5$$

в)

$$\hat{C} = 120^0 \Rightarrow \cos 120^0 = -0{,}5$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(-0{,}5) = a^2 + b^2 + ab$$
$$(n+2)^2 = (n-2)^2 + n^2 + (n-2)n$$
$$n^2 + 4n + 4 = n^2 - 4n + 4 + n^2 + n^2 - 2n$$
$$2n^2 - 10n = 0$$
$$n = 5$$