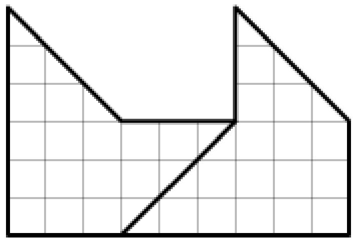
16.01.2018

Школьный этап X республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2017-2018 учебном году

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 4 класс.

1. Ответ: **4·23+67=159.** Возможны и другие решения.
2. Ответ: **500 человек**. Решение. Сначала в поселке было 50 жителей. Тогда через год в поселке стало 50 + 3*50 = 200 жителей. Сейчас в поселке 200 + 300 = 500 человек. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ: **Третий сказал " Один".** Решение. Если первый — рыцарь, то в силу его слов второй и третий — лжецы, что невозможно из-за высказывания второго островитянина. Значит, первый — лжец. Если второй — лжец, то в силу его слов третий тоже лжец, но тогда первый сказал правду, а он должен был соврать. Значит, второй — рыцарь. В силу его слов третий тоже рыцарь. Третий честно ответит: "Один".
4. Ответ: **10 см**. Решение. Пронумеруем точки в порядке, в котором они лежат на прямой. Расстояния между точками обозначим за a,b,c,d, a+b+c=6,b+ c+d=9, b+c=5. Расстояние между 1 точкой и 5 точкой равно a+b+c+d=6+9-5=10.
5. Например:



К задаче 1995-6-2

16.01.2018

Школьный этап X республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2017-2018 учебном году

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 5 класс.

1. Ответ: **29875+341=30216.** Возможны и другие решения.
2. Ответ: **500 человек.** Решение. Предположим, что сначала в поселке было m жителей. Тогда через год в поселке стало m+150= m + 3m = 4m жителей. 3m =150. Значит, m = 50 и сейчас в поселке 4m + 300 = 500 человек. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ. **Один.** Решение. Очередь не может состоять из одних рыцарей: тогда все они солгут. Рассмотрим последнего в очереди лжеца. Позади него нет лжецов, и чтобы он солгал, надо, чтобы не было лжецов и впереди него. Значит, в очереди ровно один лжец.
4. Ответ: **10 см.** Решение. Пронумеруем точки в порядке, в котором они лежат на прямой. Расстояния между точками обозначим за a,b,c,d. Расстояние между 1 точкой и 5 точкой равно a+b+c+d. Тогда на 1 точке =4a+3b+2c+d, на 2-ой точке a+3b+2c+d, на 3-ей точке a+2b+2c+d, на 4-ой точке a+2b+3c+d, на 5-ой точке a+2b+3c+4d. Сложив сумму первой и пятой точек получим 5a+5b+5c+5d=50, тогда a+b+c+d=10.
5. Ответ: **4.** Решение. Очевидно, точка A является серединой вертикального отрезка, на котором лежит. Поэтому у двух прямоугольников, лежащих левее точки A, вертикальные стороны вдвое длиннее, чем у прямоугольников со стороной AB, и потому их горизонтальные стороны вдвое короче отрезка AB. Следовательно, сторона квадрата равняется 2AB = 2, откуда и получаем ответ.

Школьный этап X республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2017-2018 учебном году

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 6 класс.

1. Ответ: **1994 и 2012.** Решение: 1994+23=2017, 2012+5=2017.
2. Ответ: **500 человек.** Решение. Предположим, что сначала в поселке было m жителей. Тогда через год в поселке стало $m + 3m = 4m$ жителей, откуда $n = 3m$. Ещё через год в поселке стало $4m + 300 = 4m + 3m/100•4m$ жителей, откуда $12m^2 = 30000$. Значит, $m = 50$ и сейчас в поселке $4m + 300 = 500$ человек. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ: **1001 лжец.** Все жители острова не могут быть лжецами, иначе каждый из них сказал бы правду. Возьмем некоторого рыцаря. Из его заявления вытекает, что лжецов на острове больше, чем (2001-1)/2=1000. Возьмем теперь некоторого лжеца. Его заявление ложно, поэтому кроме него не более половины жителей острова - лжецы. Это означает, что кроме него на острове не более 2000/2=1000 лжецов, т.е. вместе с ним лжецов не более 1001. Таким образом, из полученных оценок на число лжецов получаем, что единственная возможность - когда на острове ровно 1001 лжец.
4. Ответ: **254254254254254254254127127127127127.** Решение. Сумма цифр числа 127 равна 10, а числа 127*2 = 254 равна 11. Записав 7 раз подряд число 254 и приписав к нему потом 5 раз подряд число 127, получим искомое число.
5. <u>Ответ</u>. **80 см**. <u>Решение</u>. Пусть стороны прямоугольника равны *a* и *b*.Понятно, что Очир резал прямоугольник параллельно одной паре сторон, а Батр — параллельно другой. При этом сумма периметров прямоугольников у одного из них получилась равной $2a+4b$, а у другого — $2b+4a$. В сумме это даёт $6a+6b$, то есть утроенный периметр исходного прямоугольника. Таким образом, периметр исходного прямоугольника равен (100+140):3 = 80.

16.01.2018

Школьный этап X республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2017-2018 учебном году

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 7 класс.

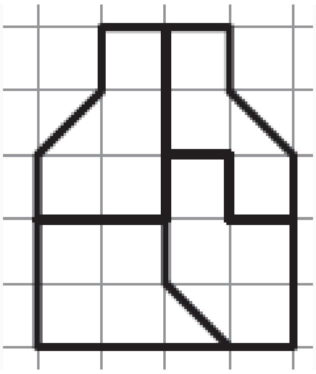
1. Ответ: $\mathbf{16^5 = 32^4}$.

2. Ответ: **12.** Решение. Если бы в шеренге было четное число учеников, мальчиков и девочек в ней было бы поровну. Но по условию мальчиков в классе больше. Значит, в шеренге нечетное число учеников, причем мальчики стоят на нечетных местах. Пусть в классе n девочек. Тогда мальчиков там n+1, и из условия получаем, что $n+1 = 0{,}52(2n+1)$, откуда $n = 12$(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

3. Ответ. **20 лжецов.** Решение. Если более 10 лжецов стоят подряд, то один из них говорит правду, значит, такое невозможно. Всего 22 человека, поэтому среди них есть рыцарь. Рассмотрим рыцаря, он говорит правду, значит, 10 следующих за ним людей – лжецы. Так как 11 лжецов подряд стоять не могут, то за 10 лжецами обязан стоять рыцарь, за которым опять стоят 10 лжецов. Всего получается 2 рыцаря и 20 лжецов.

4. Ответ. **15.** Решение. Вычитая из первого равенства второе, получаем: $x–y = (y–x)(x+y–4)$, откуда, поскольку x и y различны, получаем, что $x+y = 3$. Складывая же первое равенство со вторым, после преобразований получаем, что $x^2+y^2 = 5(x+y)$, то есть $x^2+y^2 = 15$.

5. Один из способов приведён на рисунке.



16.01.2018

Школьный этап X республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2017-2018 учебном году

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 8 класс.

1. Рассмотрим все кубы, являющиеся трёхзначными числами. Это $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$ (других нет, так как $4^3=64<100$, а $10^3=1000>999$). Так как разные буквы обозначают разные цифры, ни одно из чисел КУБ и ШАР не равно 343. Но во всех оставшихся кубах есть общая цифра 2, а в числах КУБ и ШАР общих цифр нет.
2. Ответ: **13.** Решение. Если бы в шеренге было четное число учеников, мальчиков и девочек в ней было бы поровну. Но по условию мальчиков в классе больше. Значит, в шеренге нечетное число учеников, причем мальчики стоят на нечетных местах. Пусть в классе n девочек. Тогда мальчиков там n+1, и из условия получаем, что n = 0,48(2n+1), откуда n = 12, а мальчиков 13. (. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Решение.** Допустим, среди собравшихся нет хитреца. Тогда каждый из них — рыцарь или лжец. Третий не мог сказать правду: иначе получилось бы, что правду сказал лжец. Значит, он лжец. Тогда первый сказал правду, и он — рыцарь. Остался второй. Допустим, он солгал. Тогда он лжец, и всего среди собравшихся два лжеца: второй и третий. Но тогда среди любых двух собравшихся в самом деле есть лжец, и получается, что лжец сказал правду — противоречие. Допустим, второй сказал правду. Тогда среди собравшихся два рыцаря: первый и второй. Но в таком случае среди двоих — первого и второго — нет лжеца, и получается, что второй солгал. Снова противоречие.
4. **Доказательство:**Так как $\angle DCB = \angle C/2 = \angle B$, DM — медиана, биссектриса и высота в равнобедренном треугольнике BDC. Опустим из точки M перпендикуляр ME на прямую AB. Тогда $ME = MH = MK$, откуда $K = E$. Далее, в прямоугольных треугольниках CHM и BKM сумма углов при вершине M равна $180° – \angle HMK = 120°$, откуда получаем, что каждый из углов DCM и DBM равен 30°. Поэтому в треугольнике ABC $\angle C = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle A = 90°$. Осталось заметить, что тогда треугольник ACM — равносторонний, и потому $CH \perp AM$, откуда и вытекает утверждение задачи.
5. Ответ. **42.** Решение. Пусть площадь белых частей равна x, а площадь чёрных частей равна y. Суммарная площадь белых и черных частей равна $9^2+5^2 = 106 = x+y$, а суммарная площадь белых и серых частей равна $11^2+7^2 = 170 = x+2y$. Вычитая из второго равенства первое, находим, что $y = 64$, откуда $x = 106–y = 42$.

16.01.2018

Школьный этап X республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2017-2018 учебном году

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 9 класс.

1. **Ответ: 3750. Решение.** По условию $\overline{aA} = 5A$ (A – число, составленное из всех цифр, кроме первой, a – первая цифра). Пусть n – количество цифр в числе $\overline{aA}$. Тогда $4A = a\cdot 10^{n-1}$, то есть $A = 25a\cdot 10^{n-3}$. Если $n > 4$, то у числа A, а значит, и у искомого числа, есть две совпадающие цифры (два нуля на конце). Если же $n = 4$, то $A = 250a$. Ясно, что чем больше a, тем больше исходное число. При $a \geq 4$ число $250a$ состоит из четырёх цифр, а не из трёх. При $a = 3$ получаем $A = 750$.

2. Ответ: **69**. Пусть концентрация первого раствора кислоты — c_1, а концентрация второго — c_2. Если смешать эти растворы кислоты, то получится раствор, содержащий 72% кислоты: $100c_1 + 20c_2 = 120 \cdot 0,72.$ Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 78% кислоты: $mc_1 + mc_2 = 2m \cdot 0,78.$

   Решим полученную систему уравнений:
   $$\begin{cases} 100c_1 + 20c_2 = 86,4, \\ c_1 + c_2 = 1,56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100c_1 + 31,2 - 20c_1 = 86,4, \\ c_2 = 1,56 - c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 80c_1 = 55,2, \\ c_2 = 1,56 - c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0,69, \\ c_2 = 0,87. \end{cases}$$
   Поэтому
   $m_1 = 0,69 \cdot 100 = 69$ кг. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

3. Ответ. **29.** Решение. На первый вопрос утвердительно ответили рыцари, родившиеся в феврале, и лжецы, родившиеся в другие месяцы. Пусть в феврале родились x рыцарей, x не превосходит 29. Тогда в феврале родились 29 – x лжецов, а в другие месяцы родились 100 – x лжецов. Всего лжецов получается 129 – 2x, то есть от 71 до 129 человек. На второй вопрос утвердительно ответили рыцари, родившиеся 30-го числа, и лжецы, родившиеся в другие числа. Пусть 30-го числа родились c рыцарей, c не превосходит 11. Тогда 30-го числа родились 11 – c лжецов, а в другие числа родились 60 – c лжецов. Всего лжецов получается 71 – 2c, то есть от 49 до 71 человека. Значит, число лжецов равно 71, откуда x = 29.

4. Ответ: **2**. Достроим треугольник *ABC* до параллелограмма *ABCD*. Так как диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам, точка *M* является точкой их пересечения и $BD = 2BM$. С другой стороны, $\angle BDA = \angle CBD = 70°$, а $\angle BAD = 180° – \angle BDA – \angle ABD = 70° = \angle BDA$, откуда $AB = BD = 2BM$ и $AB:BM = 2BM:BM = 2$. Второе решение. Заметим, что *BC* — биссектриса внешнего угла при вершине *B* треугольника *ABM*. Поэтому $AB:BM = AC:CM = 2$.

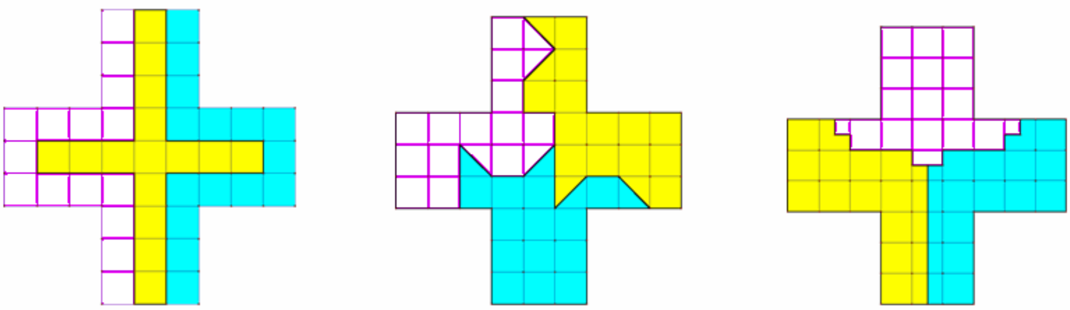
5. Ответ: **На 64%.** Решение. Пусть *ABCD* — исходный квадрат со стороной 1 (и площадью 1), *KLMN* — вырезанный квадрат со стороной *x*, причем *KL* лежит на *AB* (точка *K* ближе к *A*, чем *L*). Тогда периметр восьмиугольника *AKNMLBCD* превосходит периметр квадрата *ABCD* на $KN+LM = 2x = 0,4\cdot 4AB = 1,6AB$. То есть $x = 0,8AB$, и площадь вырезанного квадрата составляет 0,64 площади исходного.

16.01.2018

Школьный этап X республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2017-2018 учебном году

Ответы на олимпиадные задания по математике (УДЕ) 10 класс

1. Ответ: **a = 5, b = 6, c = 7, d = 8, e = 9.** Решение. Обозначим эти числа в порядке возрастания a, b, c, d, e. Если b не больше 5, то a не больше 4, тогда ab не больше 20. Следовательно, b не меньше 6. Аналогично, если d не меньше 9, то e не меньше 10, и de не меньше 90. Следовательно, d не больше 8. Но такое возможно только при b = 6, c = 7, d = 8. Теперь из условия $25/6 < a < 6$ получаем a = 5, а из условия $8 < e < 75/8$ находим e = 9.
2. Ответ: **В меньшем – 40%, в большем – 100%.** Понятно, что хотя бы в одном из сосудов содержание сока не превышает 40%. При этом условии наибольшее количество сока в 2,5 литрах будет, если мы смешаем пол-литра 40-процентного сока с 2 литрами чистого сока. В этом и только в этом случае в 2,5 литрах будет $0{,}5\cdot0{,}4 + 2 = 2{,}2$ л яблочного сока, что как раз и составляет 88%. Таким образом, в сосуде емкостью 1 л содержится 40% сока, а в двухлитровом – чистый яблочный сок.
(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ: **2, 5, 6, 10.** Решение. Рассмотрим людей под номерами 4, 5, 8, 10. Ответы только этих людей на второй и третий вопросы могли отличаться. На второй вопрос ответило утвердительно на 4 человека больше, чем на третий. Это означает, что все люди под указанными номерами ответили «да» на второй вопрос и «нет» на третий. Но изменить ответ с «да» на «нет» могут только рыцари с номерами 4, 8, и лжецы с номерами 5, 10. Значит, номера 4 и 8 получили рыцари, а номера 5 и 10 — лжецы. Теперь ясно, что на второй вопрос все лжецы должны дать утвердительный ответ, и потому лжецов ровно четверо. В то же время на первый вопрос отвечают «да» только те лжецы, которые имеют нечётные номера и, значит, такой всего один (5), а лжецов с чётными номерами трое. Поэтому лжецам принадлежат оставшиеся «нераспределёнными» чётные номера 2 и 6, что и завершает решение.
4. <u>Решение</u>. Пусть D — середина стороны AB. Так как $BD = BC$, то треугольник BCD равнобедренный. Обозначим $\angle CAD = x$, $\angle ACD = y$. Тогда $\angle DCB = 3x–y$, а $\angle CDB = x+y$. Поскольку $\angle DCB = \angle CDB$, то $3x–y = x+y$, откуда $y = x$. Но тогда $DC = DA = DB = BC$, откуда треугольник BCD — равносторонний, и, следовательно, угол B равен 60 градусам.
5. Возможны различные решения.



16.01.2018

Школьный этап X республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2017-2018 учебном году

Ответы на олимпиадные задания по математике (УДЕ) 11 класс

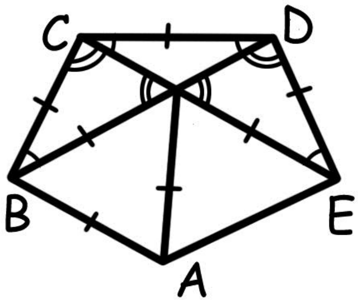
1. Ответ. **Три.** Решение. Так как 2016 делится на 9, сумма цифр получившегося после вычеркивания цифр числа также должна делиться на 9. У числа 20162016 сумма цифр равна 18. Вычёркивание одного или двух нулей нужного результата не даёт: числа 2162016, 2016216 и 216216 на 2016 не делятся. Значит, надо вычеркивать цифры, дающие в сумме 9. Так как сумма любых двух цифр числа 20162016 меньше 9, придётся вычеркнуть хотя бы три цифры. Три цифры вычеркнуть можно: 2016~~2~~0~~16~~ = 20160.

2. **Ответ: Золота – 9,65 кг, серебра – 4,2 кг.**

   Из условия видно, что объём сплава равен 0,9 дм^3. Если бы он состоял из чистого золота, то его масса была бы 0,9·19,3 = 17,37 кг. Лишние 17,37 – 13,85 = 3,52 кг получились из-за замены некоторого количества кубических дециметров серебра золотом. Каждый кубический дециметр золота на 19,3 – 10,5 = 8,8 кг тяжелее такого же объема серебра. Следовательно, серебра было 3,52 : 8,8 = 0,4 дм^3. Масса серебра – 0,4·10,5 = 4,2 кг, золота – 13,85 – 4,2 = 9,65 кг. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

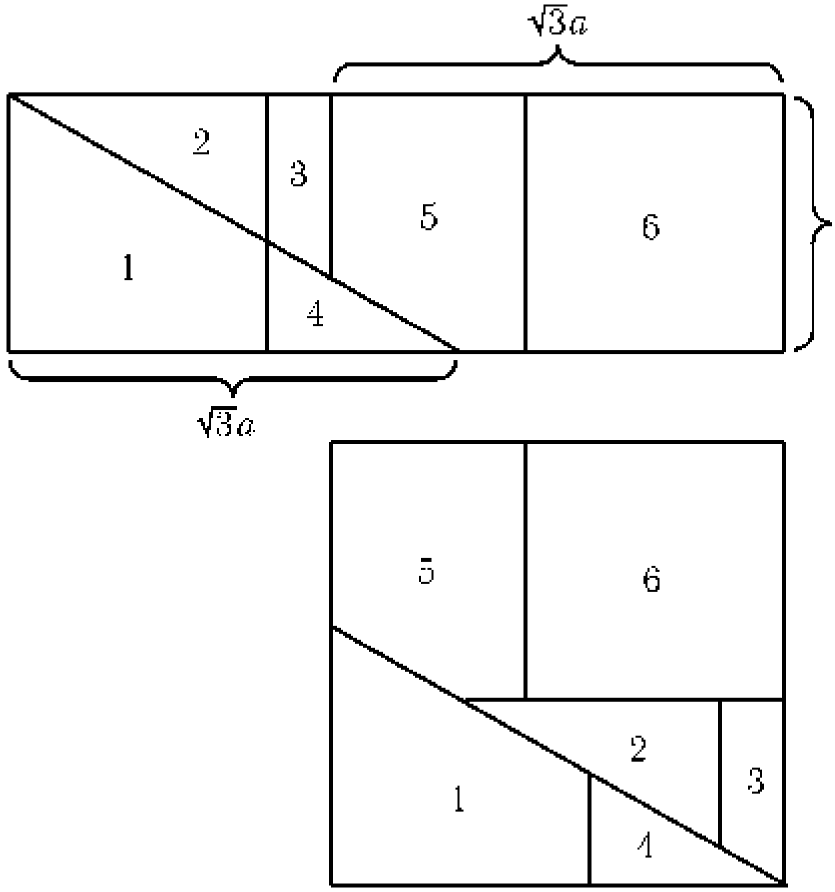
3. Ответ: **638**. Решение. Поровну рыцарей и лжецов ни в одной деревне быть не может, потому что тогда все ее жители солгали бы. Если в деревне больше рыцарей, то, очевидно, правду сказали 66 человек и 33 человека солгали, а если больше лжецов — то наоборот. Пусть на острове n деревень, где больше рыцарей. Тогда из условия следует, что 66n+33(1000–n) = 54054. Решая это уравнение, получаем ответ.

4. Ответ. **102°.** Решение**.** Проведем отрезки *BD* и *CE*. Пусть они пересекаются в точке O. Заметим, что треугольники *BCD* и *CDE* равнобедренные с углом 108° при вершине, а значит, углы при основании равны 36° (они отмечены на рисунке одной дугой). Тогда $\angle BCE = \angle BDE = 72°$. Угол *COD* равен 108° (т.к. в треугольнике *COD* два угла по 36°). Поэтому $\angle COB = 180°–108° = 72°$. Углы по 72° отмечены на рисунке двумя дугами. Получаем, что треугольники *CBO* и *DEO* равнобедренные. Значит, $AB = BO = BC = CD = DE = EO = x$.



   Заметим, что $\angle OBA = 96°–36° = 60°$. Значит, треугольник *OBA* равнобедренный с углом 60° при вершине, т.е. равносторонний. Поэтому $AO = x$. Вычислим угол *AOE* $\angle AOE = \angle EOB – \angle AOB = 108°–60° = 48°$. Треугольник *AOE* равнобедренный с углом 48° при вершине. Поэтому $\angle OEA = (180°–48°)/2 = 66°$. Получаем, что угол *E* пятиугольника равен $\angle AED = \angle AEO + \angle OED = 66°+36° = 102$.

5. Мы будем решать обратную задачу: разрежем три квадрата со стороной *a* и сложим из них квадрат со стороной $\sqrt{3}\,a$. Требуемые разрезы изображены на рис.



$\sqrt{3}a$
2
3
5
6
1
4
$\sqrt{3}a$
5
6
2
3
1
4