Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 4 класс.

1. Например:

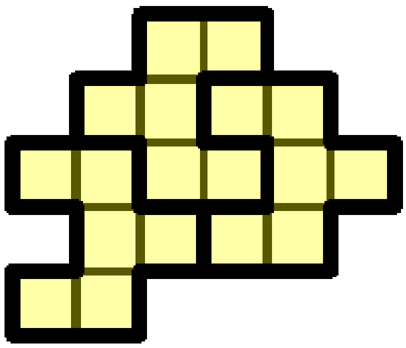
4	9	2
3	5	7
8	1	6

2. Ответ. 45 и 55 рыбок соответственно. Решение. После отселения в аквариумах осталось 100-30-40=30 рыбок. Значит, в каждом по 15. Поэтому в первом вначале было 15+30=45 рыбок, а во втором 15+40=55 рыбок.

3. 40 км/ч. Пусть расстояние будет 120 км. Тогда 120:30=4 часа. 120:60=2 часа. Общее время 6 часов. 240:6=40 км/ч. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

4. Ответ. Подойдет любая из следующих двух последовательностей:
2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235
2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221

5. Например:

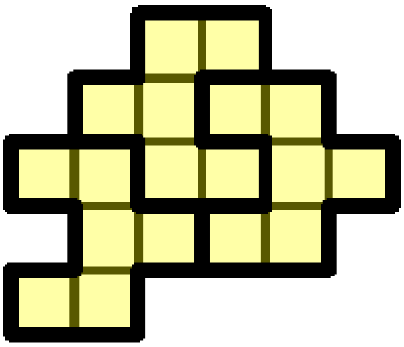


Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 5 класс.

1. Например:

3	10	5
8	6	4
7	2	9

2. Ответ: у Пюрви. Так как две двойки в произведении дают 4, то произведение 12 четверок то же самое, что произведение 24 двоек. А так как Пюрвя перемножил 25 двоек (25>24), то и результат у него получился больше (в два раза).
3. 74 км/ч. Пусть общее время 6 часов. Тогда 3х61=183 км, 3х87= 261 км.444:6=74 км/ч. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
4. Ответ. Подойдет любая из следующих двух последовательностей:
2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235
2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221
5. Например:



Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 6 класс.

1. Например:

6	27	12
21	15	9
18	3	24

2. Ответ. Трёхголовый. Решение. Рассмотрим время, за которое двухголовый дракон делает 3*4=12 прыжков. За это время трёхголовый делает 3*7=21 прыжок. Так как 12=4*3, то 12 прыжков двухголового дракона равны 4*5=20 прыжкам трёхголового. Итак, за одно и то же время трёхголовый дракон перемещается на 21 прыжок, а двухголовый – на 20 прыжков трёхголового. Значит, трёхголовый бежит быстрее.

3.

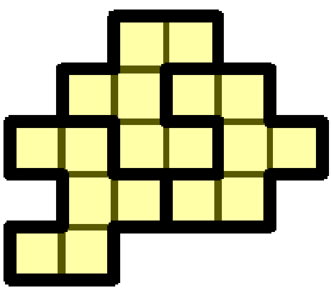
$$V_{\text{средняя}} = \frac{S}{\frac{\frac{1}{3}S}{90} + \frac{\frac{1}{3}S}{60} + \frac{\frac{1}{3}S}{45}} = \frac{1}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{90} + \frac{1}{60} + \frac{1}{45}\right)} = \frac{3}{\frac{2}{180} + \frac{3}{180} + \frac{4}{180}} =$$

$$= \frac{3}{\frac{9}{180}} = \frac{3 \cdot 180}{9} = 60\text{км/ч}$$

(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

4. Ответ. 300 или 0.Решение. У коробки есть три измерения: высота, ширина и глубина. Чтобы узнать, сколько кубиков в верхнем слое, нужно ширину умножить на глубину, в боковом – высоту на глубину. После того, как был съеден верхний слой, высота уменьшилась на 1, а глубина осталась прежней. Т.е. 77 и 55 должны делиться на глубину исходной коробки. Т.к. у 77 и 55 общие множители только 1 и 11. Если глубина равна 1, то после съедания переднего слоя ничего не осталось. Если считать, что сахар все же остался, то глубина коробки 11. Тогда ширина 77:11=7 кубиков, а высота после того, как верхний слой съеден, 55:11=5 кубиков. После того, как будет съеден боковой слой, ширина уменьшится на 1 (и станет равна 7-1=6 кубиков), а после того, как съедят передний слой, глубина уменьшится на 1 и станет равна 11-1=10. Итого высота оставшегося в коробке сахара 5, ширина – 6, глубина – 10 кубиков. Т.е. в коробке осталось 5*6*10=300 кубиков сахара.

5. Например:



Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 7 класс.

1. Например: Пусть сумма равна 24+x, тогда x=21

6	6+x	12
x	15	9
18	3	3+x

6	27	12
21	15	9
18	3	24

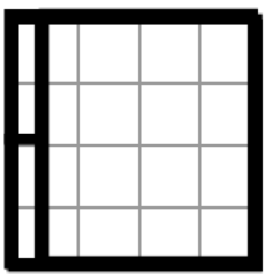
2. Ответ. 8 кг. Решение . Туловище весит столько, сколько голова и хвост, т.е. два хвоста и половина туловища. Значит, половина туловища весит как два хвоста, т.е. туловище весит 4 кг. Тогда голова весит 1+2=3 кг, а вся рыба 4+3+1=8 кг.
3.

$$V_{\text{средняя}} = \frac{S}{\frac{\frac{1}{3}S}{90}+\frac{\frac{1}{3}S}{60}+\frac{\frac{1}{3}S}{45}} = \frac{1}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{90}+\frac{1}{60}+\frac{1}{45}\right)} = \frac{3}{\frac{2}{180}+\frac{3}{180}+\frac{4}{180}} =$$

$$= \frac{3}{\frac{9}{180}} = \frac{3\cdot 180}{9} = 60\text{км/ч}$$

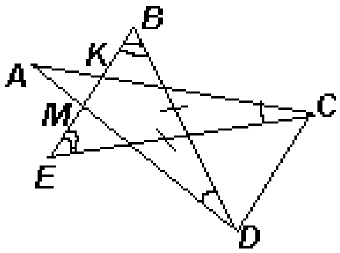
(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

4. Ответ. 300 или 0.Решение. У коробки есть три измерения: высота, ширина и глубина. Чтобы узнать, сколько кубиков в верхнем слое, нужно ширину умножить на глубину, в боковом – высоту на глубину. После того, как был съеден верхний слой, высота уменьшилась на 1, а глубина осталась прежней. Т.е. 77 и 55 должны делиться на глубину исходной коробки. Т.к. у 77 и 55 общие множители только 1 и 11. Если глубина равна 1, то после съедания переднего слоя ничего не осталось. Если считать, что сахар все же остался, то глубина коробки 11. Тогда ширина 77:11=7 кубиков, а высота после того, как верхний слой съеден, 55:11=5 кубиков. После того, как будет съеден боковой слой, ширина уменьшится на 1 (и станет равна 7-1=6 кубиков), а после того, как съедят передний слой, глубина уменьшится на 1 и станет равна 11-1=10. Итого высота оставшегося в коробке сахара 5, ширина – 6, глубина – 10 кубиков. Т.е. в коробке осталось 5*6*10=300 кубиков сахара.
5. Например, два прямоугольника 2×0,5 и один прямоугольник 3,5×4. Суммарный периметр 2*2*(2+0,5)+2*(3,5+4)=25.



Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 8 класс.

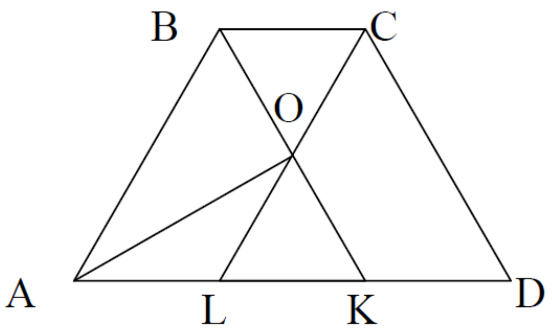
1. Ответ. 20 сумасшедших. Решение. Пусть в больнице n сумасшедших. Тогда в конце недели, с одной стороны, было сделано 7n укусов, а с другой, 2n+100.Т.е.7n=2n+100, откуда n=20.
2. Ответ: 35 суток. Пусть одновременно из Нижнего вышли плоты и пароход. Относительно плотов пароход двигается со своей собственной скоростью; раз он пять суток отплывал от плотов, то за пять суток к ним вернется. Следовательно, за 10 суток плоты проплывают столько, сколько пароход за двое суток проходит против течения. Пароход против течения идет 7 суток, поэтому плоты будут в пути 35 суток. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. Доказательство. Пусть AC и AD пересекают отрезок BE в точках K и *M* соответственно (см. рис.). Из условия задачи следует, что треугольники *CEK* и *DBM* равны по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, *CK* = *DM* и $\angle CKE = \angle DMB$. Тогда $\angle AKE = \angle AMB$ (углы, смежные с равными).
   Получим, что в треугольнике *AMK* равны углы, прилежащие к стороне *MK*, поэтому этот треугольник – равнобедренный (*AK* = *AM*). Следовательно, $AC = AK + CK = AM + DM = AD$, то есть треугольник ACD –также равнобедренный (с основанием *CD*). Поэтому $\angle ACD = \angle ADC$, что и требовалось доказать.



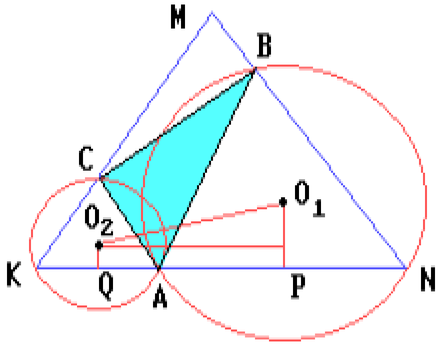
4. Ответ.43. Ваня, он весит 43 кг. Решение. Сложив данные в условии веса: 82+74+75+65+62=358, получим удвоенный вес всех детей. Т.е. все дети весят 358/2=179.Аня, Даня, Таня, Ваня в сумме весят 82+75=157, т.е. Маня весит 179-157=22.Аналогично находим, что Аня весит 179-(74+65)=40,
   Даня весит 179-(75+62)=42, Таня 179-(82+65)=32, Ваня 179-(74+62)=43.
   Т.о. самый тяжелый Ваня и он весит 43 кг.
5. Доказательство. Выложим наш квадрат из спичек, в том числе все перегородки между клеточками (длина спички равна стороне клеточки). Вместо того, чтобы закрашивать клетку, будем закрашивать ограничивающие ее спички. Тогда число, записываемое в каждую клетку равно количеству ранее закрашенных спичек, ограничивающих эту клетку. Выкинем все спички, составляющие периметр исходного квадрата. Тогда каждая оставшаяся спичка добавляет 1 в общую сумму (учитывается 1 раз в числе той из двух клеток, разделяемых этой спичкой, которая была закрашена позднее. Таким образом, сумма всех чисел есть количество внутренних перегородок между клетками. А их будет 6*5 вертикальных и 6*5 горизонтальных, т.е. всего 60.

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 9 класс.

1. Ответ. x=2012 Решение. Открыв скобки, получим 1 – 2 + 3 – 4 + … +2011 – 2012 + x =1006; -1006 + x = 1006; x=2012.
2. Ответ: 35 суток. Пусть одновременно из Нижнего вышли плоты и пароход. Относительно плотов пароход двигается со своей собственной скоростью; раз он пять суток отплывал от плотов, то за пять суток к ним вернется. Следовательно, за 10 суток плоты проплывают столько, сколько пароход за двое суток проходит против течения. Пароход против течения идет 7 суток, поэтому плоты будут в пути 35 суток. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ. 4 км. Решение. Расстояние между серединами крайних частей складывается из половин крайних участков и целого среднего участка, т.е. удвоенное это число равно длине дороги плюс длина среднего участка. Т.о. длина среднего участка = 16*2-28=4.
4. Ответ: 1:3.Так как ABCD вписанная, то она равнобедренная, т.е. AB=CD. Так как ∠BAD=60 , то ∠ABC=120. Центр вписанной окружности лежит в точке O пересечения биссектрис BK и AO углов BAD и ABC. Т.к. ∠ABK=60=∠BAK, то треугольник ABK – равносторонний, значит, биссектриса AO является медианой в этом треугольнике. Биссектриса OL угла BCD также проходит через точку O. А так как O – середина BK, то OL – средняя линия треугольника ABK (проходит через середину BK и параллельно AB), следовательно AL=LK. Аналогично LK=KD. Треугольники BCO и LKO – правильные (углы по 60) и их стороны равны (BO=OK),следовательно BC=LK=AL=KD, т.е. 3BC=AD.



5. Пусть вершины A, B и C данного треугольника расположены на сторонах KN, MN и KM равностороннего треугольника KMN. Пусть P и Q – проекции на сторону KN центров O_1 и O_2 описанных окружностей треугольников ABN и ACK соответственно. Тогда $PQ \le O_1O_2$, причём равенство достигается только в случае, если $PQ \parallel O_1O_2$. Поскольку $KN = 2PQ$, то KN максимально, если $KN \parallel O_1O_2$.

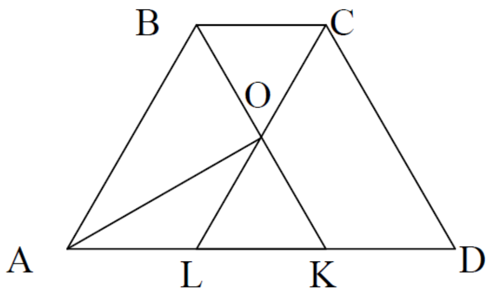


6.

Отсюда вытекает следующий способ построения. На отрезке *AB* как на хорде строим в полуплоскости, не содержащей точки *C*, дугу окружности, вмещающую угол 60°. Аналогично строим соответствующую дугу окружности на хорде *AC*. Через точку *A* проводим прямую, параллельную линии центров построенных окружностей. Эта прямая пересекает построенные дуги в точках *N* и *K*. Точка пересечения *NB* и *KC* есть третья вершина *M* искомого треугольника.

Ответы на олимпиадные задания по математике (УДЕ) 10 класс

1. Воспользуемся следующим тождеством: $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$.Тогда исходное уравнение можно записать в виде $(x-y)(y-z)(z-x) = 10$. Обозначим $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$ и запишем полученное равенство в виде $abc = 10$. Кроме того, очевидно, $a + b + c = 0$. Легко убедиться, что с точностью до перестановки из равенства $abc = 10$ следует, что числа $|a|$, $|b|$, $|c|$ равны либо 1, 2, 5, либо 1, 1, 10. Но во всех этих случаях при любом выборе знаков a, b, c сумма $a + b + c$ отлична от нуля. Таким образом, исходное уравнение не имеет решений в целых числах.
2. Ответ: 35 суток. Пусть одновременно из Нижнего вышли плоты и пароход. Относительно плотов пароход двигается со своей собственной скоростью; раз он пять суток отплывал от плотов, то за пять суток к ним вернется. Следовательно, за 10 суток плоты проплывают столько, сколько пароход за двое суток проходит против течения. Пароход против течения идет 7 суток, поэтому плоты будут в пути 35 суток. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. Мальчик, стоящий на k-м месте слева назовёт число $20-k$, поэтому сумма чисел, названных мальчиками, равна $200-S_m$, где S_m – сумма их мест. Девочка, стоящая на n-м месте слева назовет число $n-1$, поэтому сумма чисел, названных девочками, равна S_d-10, где S_d – сумма мест девочек. Осталось проверить, что $200-S_m = S_d-10$. Но это действительно так, поскольку $S_m + S_d = 1 + 2 + \ldots + 20 = 210$.
4. Ответ: 1:3.Так как ABCD вписанная, то она равнобедренная, т.е. AB=CD. Так как $\angle BAD=60$, то $\angle ABC=120$. Центр вписанной окружности лежит в точке O пересечения биссектрис BK и AO углов BAD и ABC. Т.к. $\angle ABK=60=\angle BAK$, то треугольник ABK – равносторонний, значит, биссектриса AO является медианой в этом треугольнике. Биссектриса OL угла BCD также проходит через точку O. А так как O – середина BK, то OL – средняя линия треугольника ABK (проходит через середину BK и параллельно AB), следовательно AL=LK. Аналогично LK=KD. Треугольники BCO и LKO – правильные (углы по 60) и их стороны равны (BO=OK),следовательно BC=LK=AL=KD, т.е. 3BC=AD.



5.

$$\begin{cases} n+(n-1) > n+1 - \text{неравенство.треугольника} \\ n^2+(n-1)^2 < (n+1)^2 - \text{неравенство.тупоугольного.треугольника} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n > 2 \\ n^2+n^2-2n+1 < n^2+2n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n > 2 \\ n^2-4n < 0 \end{cases} \Rightarrow n=3$$

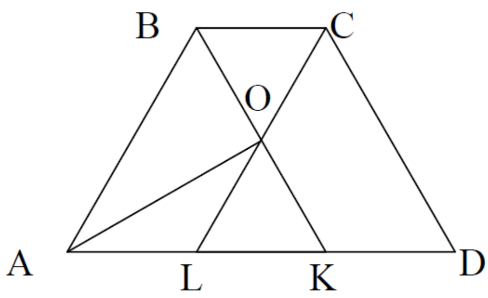
Ответы на олимпиадные задания по математике (УДЕ)
11 Класс

1. Воспользуемся следующим тождеством: $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$.Тогда исходное уравнение можно записать в виде $(x - y)(y - z)(z - x) = 10$. Обозначим $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$ и запишем полученное равенство в виде $abc = 10$. Кроме того, очевидно, $a + b + c = 0$. Легко убедиться, что с точностью до перестановки из равенства $abc = 10$ следует, что числа $|a|$, $|b|$, $|c|$ равны либо 1, 2, 5, либо 1, 1, 10. Но во всех этих случаях при любом выборе знаков a, b, c сумма $a + b + c$ отлична от нуля. Таким образом, исходное уравнение не имеет решений в целых числах.
2. Ответ: 35 суток. Пусть одновременно из Нижнего вышли плоты и пароход. Относительно плотов пароход двигается со своей собственной скоростью; раз он пять суток отплывал от плотов, то за пять суток к ним вернется. Следовательно, за 10 суток плоты проплывают столько, сколько пароход за двое суток проходит против течения. Пароход против течения идет 7 суток, поэтому плоты будут в пути 35 суток. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3.

Ответ: $x = y = 1;\ z = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, *где* $n \in Z$.

<u>Решение</u>. Из первого уравнения x,y оба положительны или оба отрицательны. Но из второго уравнения x+y>=1, поэтому они оба положительны. Тогда, применив неравенство о средних и использовав первое уравнение системы, получим: $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2$. *Так как* $\forall z \in R\ \cos^2 z \geq 0$, *то из второго уравнения следует, что* $x + y = 2$ *и* $\cos z = 0$. *Откуда* $x = y = 1;\ z = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, *где* $n \in Z$.

4. Ответ: 1:3.Так как ABCD вписанная, то она равнобедренная, т.е. AB=CD. Так как $\angle BAD=60$, то $\angle ABC=120$. Центр вписанной окружности лежит в точке O пересечения биссектрис BK и AO углов BAD и ABC. Т.к. $\angle ABK=60=\angle BAK$, то треугольник ABK – равносторонний, значит, биссектриса AO является медианой в этом треугольнике. Биссектриса OL угла BCD также проходит через точку O. А так как O – середина BK, то OL – средняя линия треугольника ABK (проходит через середину BK и параллельно AB), следовательно AL=LK. Аналогично LK=KD. Треугольники BCO и LKO – правильные (углы по 60) и их стороны равны (BO=OK),следовательно BC=LK=AL=KD, т.е. 3BC=AD.



5. Ответ: 3,5,7.

$$\hat{C} = 120^0 => \cos 120^0 = -0{,}5$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(-0{,}5) = a^2 + b^2 + ab$$
$$(n+2)^2 = (n-2)^2 + n^2 + (n-2)n$$
$$n^2 + 4n + 4 = n^2 - 4n + 4 + n^2 + n^2 - 2n$$
$$2n^2 - 10n = 0$$
$$n = 5$$