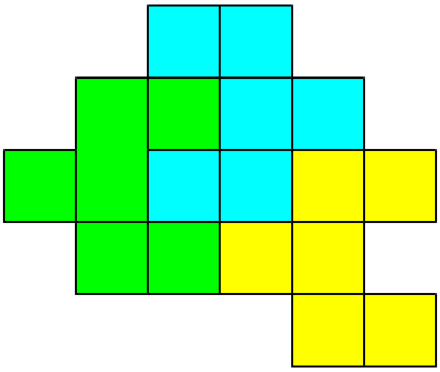
Муниципальный этап IX республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2016-2017 у.г.

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 4 класс.

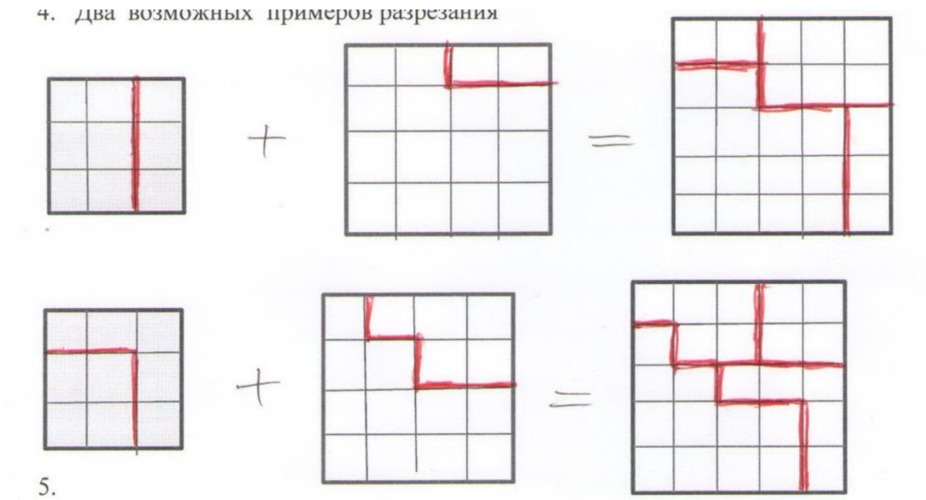
1. **Ответ:** 20 пакетиков.
   Заметим, что в коробке не могло быть меньше 20 пакетиков: если их хотя бы 19, то Эвелина не сможет выпить больше $19\cdot3 = 57$ чашек, а она выпила 58. С другой стороны, в коробке не могло быть больше 20 пакетиков: если их хотя бы 21, то Сарина не могла выпить меньше $21\cdot2 = 42$ чашек, а она выпила 41. Тем самым, в коробке было 20 пакетиков: Эвелина заварила 18 пакетиков по три раза и 2 пакетика по два раза, а Сарина заварила 1 пакетик три раза и 19 пакетиков по два раза.
2. **Ответ: 9 часов.** Пусть каждому из них нужно сделать по 36 деталей. Тогда первый мастер за 1 час делает 1 деталь , второй 3 детали. Вместе за 1 час они выполнят 4 детали. Тогда работая вместе 36:4=9 часов. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. Например:
   $(9+8+7+6-5)\cdot(4+3-2-1) = 100$
   $1+2+3+4+5+6+7+8\cdot9=100$
4.



5. Ответ: 18 см^2. Площадь фигуры равна 18 см^2. Достраиваем до прямоугольника и вырезаем 2 прямоугольных треугольника.

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 5 класс.

1. **Ответ:** 90567 + 90567= 181134
2. **Ответ: 1 час.** Пусть каждому из них нужно сделать по 36 деталей. Тогда первый мастер за 1 час делает 6 деталей , второй 12 деталей, третий-18 деталей. Вместе за 1 час они сделают 36 деталей. Тогда работая вместе 36:36=1 час. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ:** поровну. После второго переливания в стакане с молоком оказывается ровно столько чая, сколько оттуда было взято молока: ведь объём жидкости не изменился. Значит, в итоге чая в молоке столько же, сколько молока в чае.
4. **Ответ:** на 50%. Пусть Батр собрал 100 грибов, тогда Арслан собрал 80, а Пюрвя - 120 грибов. Таким образом, Пюрвя собрал грибов в 1,5 раза больше, чем Арслан, то есть на 50%.
5. **Например:**



Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 6 класс.

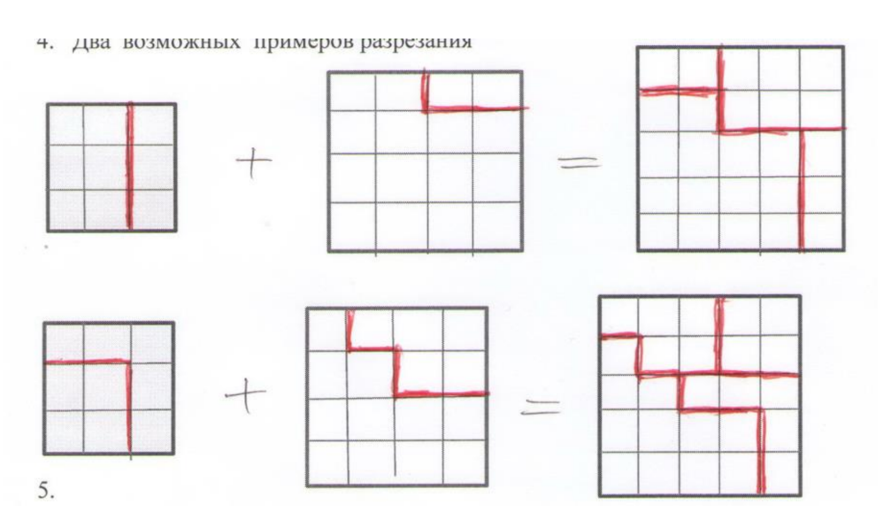
1. **Например:** 5+40+367+2918=3330. Возможны и другие решения.
2. **Ответ:** 15 часов.

	A (работа)	V (часть работы/час)	t (час)
И+П	1	$\frac{1}{20}$	20
П+В	1	$\frac{1}{21}$	21
В+И	1	$\frac{1}{28}$	28
В+И+П	1	$(\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}):2$	?

Производительность Владимира, Игоря и Павла равна 1/15.Тогда мальчики покрасят забор, работая втроем за 15 часов. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

3. **Ответ: 21 пирожок.** Так как пирожков с малиной половина от общего количества, то пирожков с черникой и клубникой вместе столько же, сколько пирожков с малиной (см. рис.). При этом, пирожков с черникой на 14 меньше, чем пирожков с малиной, следовательно, эти 14 пирожков – с клубникой. Тогда пирожков с малиной и черникой: $14 \cdot 2 = 28$, значит, всего испечено $28 + 14 = 42$ пирожка. Таким образом, пирожков с малиной $42 : 2 = 21$, с черникой – 7, а с клубникой – 14.

4. $6:3+1+2-5+4\cdot7\cdot8\cdot9=2016$
5.



Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 7 класс.

1. **Ответ:** Например, 1/6 + 7/3 = 5/2. Есть и другие примеры. Поиск примера упрощается, если заметить, что ни один знаменатель не может быть равен ни 1 (тогда знаменатели оставшихся дробей совпадали бы), ни 5 или 7 (потому что если знаменатели двух несократимых дробей не делятся на простое число, то не делится на это простое число и знаменатель их суммы или разности).
2. **Ответ:** 24 часа.

	A (вся работа)	V (часть работы/день)	t (дни)
I	1	1/x	x
	5/x	1/x	5
II	5/x	5/(3x)	3
I+II	1	1/9	9

1/x+5/3x=1/9 1/x(1+5/3)=1/9 1/ x=1/24 x=24

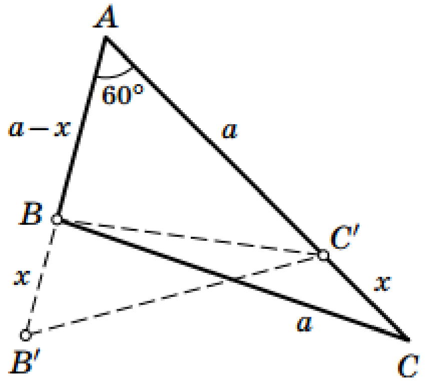
(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

3. **Ответ:** 32.

По условию $\frac{60}{100} < \frac{20}{x} < \frac{70}{100}$, отсюда $28\frac{4}{7} = \frac{200}{7} < x < \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$.

То есть $29 \le x \le 33$. Из условия задачи число вопросов должно делиться на 4. Тогда в тесте было 32 вопроса.

4. Предположим противное. Пусть в треугольнике ABC угол A равен 60°, BC = a, AB = a – x, тогда AC = a + x. Выберем на луче AB точку B', а на луче AC точку C' так, что AB' = AC' = a. Треугольник AB'C' – равнобедренный с углом 60°. Поэтому он является и равносторонним, то есть B'C' = a. Осталось заметить, что треугольники BC'B' и C'BC равны по трём сторонам. Поэтому ∠BCC' = ∠C'B'B = 60°. Таким образом, в треугольнике ABC угол C тоже равен 60°, то есть он равносторонний.



5. **Ответ:** 4 см^2. Провести отрезок EF. Квадрат можно разрезать на кусочки, из которых можно получить еще 3 одинаковые фигуры. Тогда площадь искомой фигуры в 4 раза меньше площади квадрата.

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 8 класс.

1. **Ответ:** x = 945
Решение. Для любого натурального x выражение НОД(x,9) принимает только три значения: 1, 3 и 9, а выражение НОД(x,14) - четыре значения: 1, 2, 7 и 14. Их сумма равна 16 только в одном варианте НОД(x,9) = 9 и НОД(x,14) = 7. Из первого равенства следует, что x делится на 9, а из второго – делится на 7, т.е. x делится на 63 и для некоторого целого n имеем x = 63n . При этом x должно быть нечетным, так как в противном НОД(x,14) =14 . Таким образом, x = 63(2k +1) =126k + 63 для некоторого целого k>= 0 . По условию число x трехзначное, т.е.
Наибольшее x соответствует k = 7 и равно x =126*7 +63 = 945 .
2. **Ответ:** 20 коров. Пусть корова съедает в день 1 порцию травы. За 60 – 24 = 36 дней на лугу выросло 30·60 – 70·24 = 120 порций. Значит, помимо съеденных за 60 дней 30 коровами 1800 порций за добавочные 96 – 60 = 36 дней вырастет еще 120 порций. Всего 1920. За 96 дней их съедят 1920 : 96 = 20 коров. . (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: 4x4, 3x6 ,2x2.** Так как по условию *ab=2(a+b),*то подставив в тождество получим уравнение в целых числах *(a-2)(b-2)=4*. Решив 3 системы уравнений, получим 3 решения 4x4, 3x6 ,2x2.
4. **Ответ:** 35 учеников. Пусть x-количество учеников, y-количество неуспевающих учеников
$0{,}025x \le y \le 0{,}029x$ $\quad 34\frac{14}{29}y \le x \le 40y$
Тогда при y=1 , минимальное количество x=35 (при y=2,3,… задача не имеет смысла)
$34\frac{14}{29} \le x \le 40$
5. Пусть в пустой клетке верхней строки стоит число x, тогда сумма чисел в этой строке равна 6 + x. Для того, чтобы сумма чисел первого столбца была такой же, в пустой клетке этого столбца должно стоять число x + 2. Рассматривая диагональ от левой нижней клетки до правой верхней и рассуждая аналогично, получим, что в центральной клетке должно стоять число x – 2. Тогда справа от него стоит число 6 – x, а под ним – число 8 – x (рис. слева). Для того, чтобы суммы чисел третьей строки и третьего столбца были равны 6 + x, в правой нижней клетке должно стоять число 2x – 5. С другой стороны, там должно стоять число 7, чтобы сумма чисел во второй диагонали была такой же. Значит, 2x – 5 = 7, откуда x = 6. Следовательно, таблица восстанавливается однозначно (рис. справа), что и требовалось.

1	x	5
$x+2$	$x-2$	$6-x$
3	$8-x$	$2x-5$

1	6	5
8	4	0
3	2	7

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 9 класс.

1. **Ответ: (2,88), (8,4).** Разложим на множители (x-1)(x+y+1)=91=7x13. Решим системы уравнений и найдем 2 решения.
2. **Ответ:** 20 коров. Пусть корова съедает в день 1 порцию травы. За $60 - 24 = 36$ дней на лугу выросло $30 \cdot 60 - 70 \cdot 24 = 120$ порций. Значит, помимо съеденных за 60 дней 30 коровами 1800 порций за добавочные $96 - 60 = 36$ дней вырастет еще 120 порций. Всего 1920. За 96 дней их съедят $1920 : 96 = 20$ коров. . (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: 204x12, 1012x4.**
   Так как по условию $ab=2(a+b)+2016$, то подставив в тождество получим уравнение в целых числах $(a-2)(b-2)=2020=101\cdot 2^2\cdot 5$. Решив 2 системы уравнений, получим 2 решения 204x12, 1012x4.
4. **Ответ:** 35 учеников. Пусть x-количество учеников, y-количество неуспевающих учеников
   $$0{,}025x \le y \le 0{,}029x$$
   $$34\frac{14}{29}y \le x \le 40y$$
   Тогда при y=1 , минимальное количество x=35 (при y=2,3,… задача не имеет смысла)
   $$34\frac{14}{29} \le x \le 40$$
5. **Ответ:** 4072324. Запишем условие задачи в виде: $f(x + 1) - f(x) = 2x + 3$. Подставим вместо x числа 0, 1, 2,…, 2017. Получим: $f(1)-f(0) = 2 \cdot 0+3$, $f(2)-f(1) = 2 \cdot 1+3$, …, $f(2017)-f(2016) = 2 \cdot 2016+3$. Сложим полученные равенства почленно: $f(2017) - f(0) = 2 \cdot (1 + 2 + . . . + 2016) + 3 \cdot 2017$.Учитывая, что $1+2+. . .+2016 = 2017 \cdot 2016/2$, получим, что $f(2017) = 1+2016 \cdot 2017+3 \cdot 2017 =1 + 2 \cdot 2017 + 2017^2 = 2018^2=4072324$.

Ответы на олимпиадные задания по математике (УДЕ) 10 класс

6. Ответ: 4356. Пусть $\overline{a(a+1)(a+2)(a+3)}$-первоначальное число

$\overline{(a+1)a(a+2)(a+3)}=x^2$ искомое число

$x^2=(a+1)\,1000+100a+10(a+2)+a+3$

$x^2=11(101a+93)$

101a+93должно делится на 11

$101a+93=11(9a+8)+2a+5$

$0\le a\le 6$, то $5\le 2a+5\le 17$

В промежутке $[5;17]$ только одно число делится на 11

$2a+5=11$ a=3, тогда $4356=66^2$

7. Ответ: за 365 дней. 37 слонов за пять дней выпивают столько же, сколько $37\cdot 5=185$ слонов за один день. Разница в два слона объясняется тем, что за четыре лишних дня из ключей "натекает" столько воды, сколько два слона выпивают за день. Таким образом, ключи восполняют за день половину дневной порции слона. А в озере (без ключей) 182,5 дневных порций слона. Один слон половину дня пьет воду "из озера", а половину – "из ключей". Поэтому ему понадобится $182{,}5\cdot 2=365$ дней. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

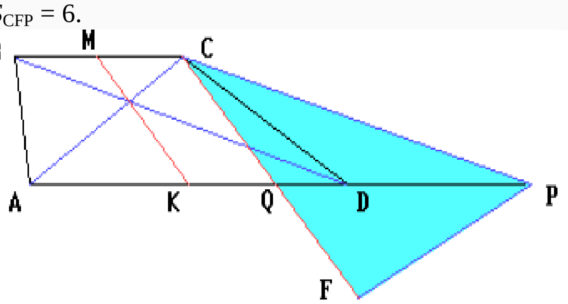
8. Ответ: 4072324. Запишем условие задачи в виде: $f(x+1)-f(x)=2x+3$. Подставим вместо x числа 0, 1, 2,…, 2017. Получим: $f(1)-f(0)=2\cdot 0+3$, $f(2)-f(1)=2\cdot 1+3$, …, $f(2017)-f(2016)=2\cdot 2016+3$. Сложим полученные равенства почленно: $f(2017)-f(0)=2\cdot(1+2+...+2016)+3\cdot 2017$.Учитывая, что $1+2+...+2016=2017\cdot 2016/2$, получим, что $f(2017)=1+2016\cdot 2017+3\cdot 2017=1+2\cdot 2017+2017^2=2018^2=4072324$.

9. Ответ: 6 см^2. Пусть M и K — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$. Через вершину C меньшего основания BC ($AC=3$, $BD=5$) проведём прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке P и прямую, параллельную MK, до пересечения с прямой AD в очке Q. Тогда $AQ=AK+KQ=AK+MC=AD/2+BC/2==(AD+BC)/2=(AD+DP)/2$.

Поэтому CQ — медиана треугольника ACP,$CQ=MK=2$, $AC=3$, $CP=BD=5$, $S_{ABCD}=S_{ACP}$.

На продолжении медианы CQ за точку Q отложим отрезок QF, равный CQ. Стороны треугольника CFP равны:$CF=2CQ=4$, $CP=BD=5$, $FP=AC=3$.

Этот треугольник прямоугольный ($CP^2=CF^2+PF^2$). Поэтому $S_{CFP}=CF\cdot PF/2=6$. Следовательно, $S_{ABCD}=S_{ACP}=S_{CFP}=6$.



10. Ответ: $\sqrt{2}$

методом объемов получим, что $V_{BDC_1}=\frac{a^3}{6}=\frac{1}{3}S_{BDC_1}\cdot h$. Тогда $\frac{a^3}{6}=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot h$

$h=\frac{a}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$, где h-это расстояние от C до плоскости сечения, проходящей через вершины B, D и C_1.

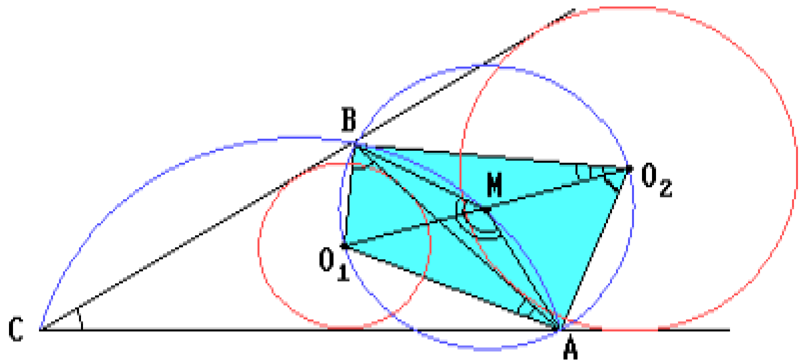
Ответы на олимпиадные задания по математике (УДЕ) 11класс

1. **Ответ: 788.** Сначала найдём, какие числа удовлетворяют первым двум условиям: a чётно и a + 1 делится на 3. Наименьшее такое число – 2. Значит, этим условиям удовлетворяют числа вида 6k + 2 (НОД(2, 3) = 6). Добавим третье условие: ищем числа вида 6k + 4, которые делятся на 5. Наименьшее такое число – 10, значит, трём условиям удовлетворяют числа вида 30l + 8. Ищем число вида 30l + 11, которое делится на 7. Тогда на 7 делится и число 2l – 3. Наименьшее l равно 5, значит, четырём условиям удовлетворяют числа вида 210m + 161 – 3 = 210m + 158. Ищем число вида 210m + 162, которое делится на 11. Тогда на 7 делится и число m + 8. Наименьшее m равно 3, значит, пяти условиям удовлетворяют числа вида 2310n + 788. Число 788 удовлетворяет и последнему условию: 793 делится на 13.
2. **Ответ**: за 365 дней. 37 слонов за пять дней выпивают столько же, сколько 37·5 = 185 слонов за один день. Разница в два слона объясняется тем, что за четыре лишних дня из ключей "натекает" столько воды, сколько два слона выпивают за день. Таким образом, ключи восполняют за день половину дневной порции слона. А в озере (без ключей) 182,5 дневных порций слона. Один слон половину дня пьет воду "из озера", а половину – "из ключей". Поэтому ему понадобится 182,5·2 = 365 дней. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ:** –3. Заметим, что $a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} = -a_n$. Значит, $a_{n+6} = a_n$, то есть члены последовательности повторяются с периодом 6. Так как 100 при делении на 6 дает остаток 4, то $a_{100} = a_4 = -a_1$.
4. Пусть вневписанная окружность касается стороны AB треугольника ABC, $\angle C = \alpha$, $\angle CAB = \beta$, $\angle CBA = \gamma$; O_1, O_2 — центры вписанной и вневписанной окружностей соответственно, M — середина O_1O_2. Поскольку отрезок O_1O_2 виден из точек A и B под прямым углом, то M — центр окружности, описанной около четырёхугольника AO_1BO_2.
Тогда

$$\angle AO_2B = \angle AO_2O_1 + \angle BO_2O_1 = \angle O_1BA + \angle O_1AB = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle AMB = 2\angle AO_2B = 180^\circ - \alpha.$$

Следовательно, точки A, C, B и M лежат на одной окружности, т.е. на окружности, описанной около треугольника ABC.



5. **Ответ:** $\sqrt{2}$. Пусть PQKLMN – сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, являющееся правильным шестиугольником (см. рисунок).Пусть прямые PN и KQ пересекаются в точке T на прямой AD. Очевидно, треугольник KTN равнобедренный. Значит, $TP = TQ$, и прямоугольные треугольники APT и AQT равны по катету и гипотенузе. Поэтому треугольник PAQ – равнобедренный прямоугольный. То же верно для треугольника KBQ. Эти треугольники равны по гипотенузе, следовательно, $AQ = BQ$. Аналогично доказывается, что остальные *вершины сечения* также являются *серединами ребер куба*. *Центр сечения* является серединой его диагонали KN, которая совпадает с серединой диагонали BD_1 куба, то есть с *центром куба*. Заметим, что два сечения, указанных в условии задачи, имеют общий отрезок, соединяющий

середины противоположных ребер куба. Действительно, всего у куба 12 ребер. Если середины шести из них являются вершинами сечения, то из оставшихся шести точек в одной плоскости лежат не более четырех. Поэтому два таких сечения имеют две общие вершины, которые лежат на противоположных ребрах куба. Так как оба сечения симметричны относительно центра куба, то эти вершины лежат на противоположных ребрах куба. Следовательно, сечения пересекаются по отрезку, соединяющему середины этих ребер. Длина такого отрезка равна диагонали грани куба, то есть $\sqrt{2}$.