Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 4 класс.

1. 12 – 3 – 4 + 5 – 6 + 7 + 8 9 = 100
   1+ 2 3 – 4 + 5 6 + 7 + 8 + 9 = 100
2. Ответ: На 25%. Пусть зарплата 10000 рублей, товар 100 рублей. Можно купить 10000:100=100 шт. Понижение цен на 20% означает, что новая цена товара равна 80 руб.. Значит, на прежнюю зарплату можно купить товаров в 10000 : 8 0 = 125 больше, то есть на 25% больше. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. Решение. Всего денег у купцов (90 + 85 + 80 + 75) : 3 = 110 рублей. Поэтому у первого 110 - 90 = 20, у второго 110 - 85 = 25, у третьего 110 - 80 = 30, а у четвёртого 110 - 75 = 35 рублей.
4.

297	3	192
59	164	**269**
136	**325**	31

5. Уменьшим сторону данного прямоугольника в два раза. Тогда площадь получившегося прямоугольника будет равна 27 м2. Затем увеличим другую сторону в три раза. Площадь получившейся фигуры станет 27•3 = 81 (м2). Так как по условию образовался квадрат, то его сторона равна 9 м.

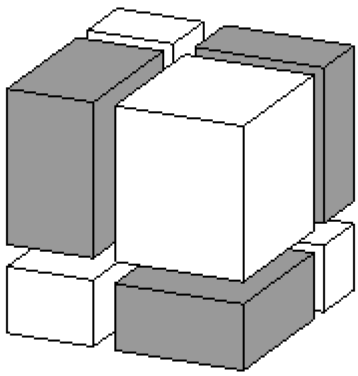
Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 5 класс.

1. 12 – 3 – 4 + 5 – 6 + 7 + 8 9 = 100
   1+ 2 3 – 4 + 5 6 + 7 + 8 + 9 = 100
2. Ответ: $470\frac{10}{17}$ Количество "сухого" вещества в одной тонне свежескошенной травы равно 1000 : 100·40 = 400 кг. Влажность сена 15%, то есть "сухого" вещества в нём 85%, а тогда всего сена получится 400 : 85·100 = $470\frac{10}{17}$ кг сена. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ: 5 девочек.
   Первый слева ребёнок отдал 9 орехов, то есть у него стало на 9 орехов меньше, второй ребёнок отдал 8 орехов, а получил 1, то есть у него стало на 7 орехов меньше. Продолжая аналогичные рассуждения, заметим, что у первых пяти детей стало меньше на 9, 7, 5, 3 и 1 орехов соответственно, а у следующих пяти – больше на 1, 3, 5, 7 и 9 орехов соответственно. Так как 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25, то девочками могли быть только последние пять детей.
4. (2016-15)/3=667 к каждому числу магического квадрата с постоянной суммой 15 прибавим по 667 и получим искомый квадрат.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

669	676	671
674	672	670
673	668	675

5. **Ответ: 22.**
   У каждого малого бруска поверхность распилов составляет половину всей его поверхности. Будем считать только её. Раскрасим малые бруски в чёрный и белый цвета, как на рисунке (невидимый брусок – чёрный). Тогда каждые два одинаковых соприкасающихся на распиле прямоугольника – разного цвета. Поэтому сумма площадей чёрных распилов равна сумме площадей белых. А тогда и сумма площадей поверхностей белых брусков равна сумме площадей поверхностей чёрных. Отсюда площадь поверхности невидимого чёрного бруска равна
   (148 + 46 + 72 + 28) – (88 + 126 + 58) = 22.



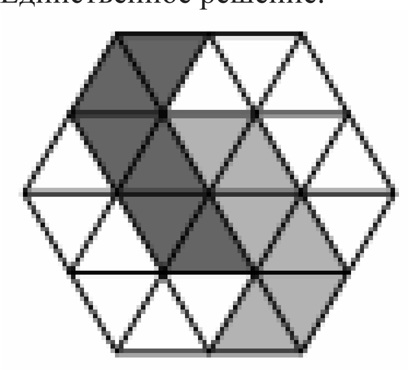
Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 6 класс.

1. 532 и 14 (532 : 14 = 38) или 215 и 43 (215 : 43 = 5).
2. Ответ:70%. 2*0,4+2=2,8 л. 2,8:4*100=70%. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ: Через 17 минут 15 секунд.
   Так как Пюрвя сначала поравнялся с кабинкой №13, а потом с кабинкой №12, то нумерация идёт по направлению движения подъёмника. Примем расстояние между соседними кабинками за единицу. Тогда расстояние по тросу подъёмника между кабинками №42 и №12 равно 69 единицам: 57 единиц до кабинки №99 и еще 12 единиц до кабинки №12. Значит, расстояние между Пюрвей и вершиной горы равно половине этого количества, то есть 34,5 единицы. Поскольку кабинки, с которыми поравнялась кабинка №42, движутся навстречу с той же скоростью, то скорость сближения кабинок в два раза больше скорости подъёмника. Значит, на преодоление одной кабинкой одной единицы расстояния уходит 30 секунд, а Пюрвя будет на вершине горы через 34,5·30 : 60 = 17,25 (минут).
4. (2016-15)/3=667 к каждому числу магического квадрата с постоянной суммой 15 прибавим по 667 и получим искомый квадрат.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

669	676	671
674	672	670
673	668	675

5. Единственное решение.



Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 7 класс.

1.

3. В левой части равенства

$1:2:3:4:5:6:7:8:9:10=7$

Расставьте скобки так, чтобы оно стало верным.

Решение. Для любой расстановки скобок число 1 окажется в числителе, а 2 в знаменателе. Поэтому число 7 можно представить тремя способами

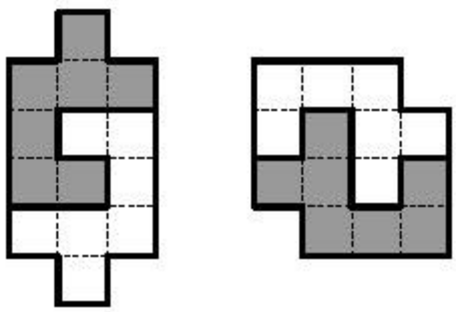
$$7=\frac{1\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot4\cdot9\cdot10}=\frac{1\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot10}{2\cdot5\cdot8\cdot9},$$

что соответствует следующим расстановкам скобок

$$7=((((1:2):3:4:5):((((6:7):8):9):10)=$$
$$=1:((2:(3:(((4:5):6):7))):((8:9):10))=$$
$$=1:((2:3):((4:((5:6):(7:8))):(9:10))).$$

2. Ответ: 50 кг. В начале хранения в ягодах был 1% сухого вещества. В конце хранения этот же вес составлял уже 2% от всех ягод. Значит, вес ягод уменьшился вдвое.(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. $с^2 > а^2+в^2$ – тупоугольный, 3,5,7 и 2,6,7 – тупоугольный.
4. Ответ: В 15 часов 56 минут. В 12 часов расстояние между лягушками сократилось до 2015 – 9 = 2006 м. После этого, за каждые две минуты лягушки сближаются на 9 + 8 = 17 м. Так как 2006 : 17 = 118, то через 118·2 = 236 минут после полудня лягушки встретятся. Это составляет 3 часа 56 минут. Значит, встреча произойдет в 15:56.

5.



Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 8 класс.

1.

Пусть x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2-4x-46=0$. Составить квадратное уравнение, корнями которого являлись бы числа $2x_1+x_2$ и $2x_2+x_1$.

Решение.

По т. В $x_1+x_2=+7$ $x_1x_2=-46$. Корни искомого ур-ния $x_1'=2x_1+x_2$ и $x_2'=2x_2+x_1$. Тогда для искомого уравнения $x^2+px+q=0$. $p=-(x_1'+x_2')=$

$=-(2x_1+x_2+2x_2+x_1)=-3(x_1+x_2)=-3\cdot7=-21.$

$q=x_1'\cdot x_2'=(2x_1+x_2)\cdot(2x_2+x_1)=4x_1x_2+2x_1^2+2x_2^2+x_1x_2=$

$=5x_1x_2+2(x_1^2+x_2^2)=5x_1x_2+2(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=$

$=x_1x_2+2(x_1+x_2)^2=\cancel{7+2(-46)=-85}.$

$=-46+2\cdot49=52.$ Отв. $x^2-21x+52=0.$

2. Ответ: $^1/_4$. $x^2y-y^2x=xy(x-y)>0$ при $x>y>0$, значит, наибольшее значение данного выражения (если оно достигается) положительно. Поэтому достаточно рассмотреть случай $0<y<x\le 1$.При этих ограничениях согласно неравенству Коши $4xy(x-y)\le x(y+\ (x-y))^2=x^3\le\ 1$. Следовательно, наибольшее значение нашего выражения равно $^1/_4$ и достигается при $x=1,\ y=x-y={}^1/_2$.

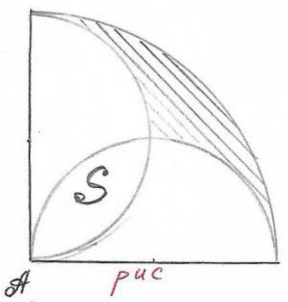
3. Пусть в фирме работало N сотрудников, а фонд составлял S рублей. Средняя зарплата S/N. После увольнения средняя зарплата станет 6S/5N, фонд составит 4S/5. Значит сотрудников должно быть $\frac{4S}{5}:\frac{6S}{5N}=\frac{2}{3}N$. Таким образом надо уволить 1/3 сотрудников. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

4. а)Это среднее геометрическое оснований. a/x=x/b x^2=ab. $EF=\sqrt{ab}$ б) это среднее квадратичное. Достроим до треугольника AOD. Из подобия треугольников получим систему, где S_0-площадь верхнего треугольника, S-площадь трапеций

$$\frac{S_0+2S}{S_0}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\ \ \frac{S_0+S}{S_0}=\left(\frac{PQ}{b}\right)^2 \text{ откуда } PQ=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

5.

Внутри сектора с прямым центральным углом расположены два полукруга (рис). Найдите заштрихованную площадь, если площадь ограниченная двумя полуокружностями, равна S.



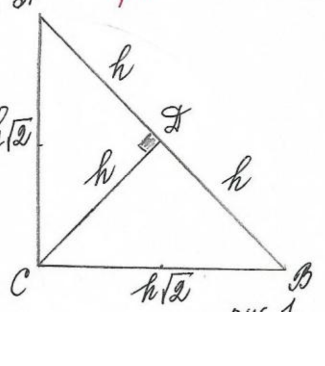
рис

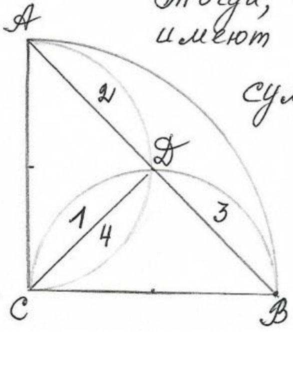
Решение

Рассм. вспомогательный равн. прям. Δ-к с высотой CD = h (см. рис 1). Делаем вывод: данный в условии сектор S получен из Δ ABC, а полуокр-ти построены на его катетах и пересекаются в т. D

Тогда, сегменты 1 и 4 имеют одинаковые площади $\frac{S}{2}$, сумма S 2 и 3 равна S

Тогда





6.

величину S можно выразить как разность площадей полукруга CDB и ΔCDB

$$S = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{h\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{4}\pi h^2 - \frac{1}{2}h^2 = \frac{h^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

В заключении:

искомая площадь = от площади четверти круга с радиусом BC отнимем площадь ΔABC и площадь 2 и 3 : т.е

$$\frac{1}{4}\pi\left(h\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(h\sqrt{2}\right)^2 - S = \frac{\pi h^2}{2} - h^2 - S =$$

$$= \frac{h^2}{2}(\pi - 2) - S = 2S - S = \underline{\underline{S}}$$

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 9 класс.

1. Ответ: 4 нуля. $\left(\sqrt{26}-5\right)^4=\dfrac{1}{\left(\sqrt{26}+5\right)^4}<\dfrac{1}{(5+5)^4}=\dfrac{1}{10^4}$
2. Пусть в фирме работало N сотрудников, а фонд составлял S рублей. Средняя зарплата S/N. После увольнения средняя зарплата станет 6S/5N, фонд составит 4S/5. Значит сотрудников должно быть $\dfrac{4S}{5}:\dfrac{6S}{5N}=\dfrac{2}{3}N$. Таким образом надо уволить 1/3 сотрудников. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. $2(1+a^4)(1+b^4)-2(a^2(1+b^4)+b^2(1+a^4))=(a^4b^4-2a^4b^2+a^4)+(a^4b^4-2a^2b^4+b^4)+(a^4-2a^2+1)+(b^4-2b^2+1)=a^4(b^2-1)^2+b^4(a^2-1)^2+(a^2-1)^2+(b^2-1)^2\geq 0.$
4. Ответ: когда стороны образуют геометрическую прогрессию. Дан ABC со сторонами a<b< c. Тогда треугольник ACM имеет стороны x, a, b.

$$\frac{x}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$$

$b=\sqrt{ac}$, это значит, что стороны треугольника образуют возрастающую геометрическую прогрессию со знаменателем

$$q=\frac{\sqrt{ac}}{a}=\sqrt{\frac{a}{c}}$$

и должно выполняться неравенство треугольника a+b>c

$a+\sqrt{ac}>c$ или $a+aq>aq^2$, тогда $1+q>q^2$

$$q\in\left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

б) Дан треугольник ABC со сторонами $3\sqrt{2}$, 6, $6\sqrt{2}$. Через вершину C проведите отрезок CM отсекающий треугольник ACM подобный ABC и имеющий с ним 2 равные стороны.

Решение: Треугольник ABC тупоугольный, составим пропорцию

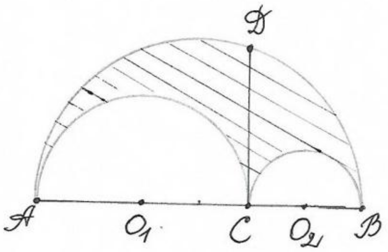
$$\frac{3\sqrt{2}}{CM}=\frac{6\sqrt{2}}{6}=\frac{6}{AM}$$

CM=3, аналогично BM=AM=$3\sqrt{2}$, CM –медиана.

5.

История математики.

Архимед, пытаясь решить задачу о квадратуре круга, рассмотрел арбелос — фигуру, ограниченную тремя полуокружностями. Найдите площадь арбелоса, если $C\mathcal{D}=a$.



Решение

Обозначим $AO_1=R$, $CO_2=r$, тогда $AB=2(R+r)$

$$S_{арб.}=S_{\text{внешнего полукруга}}-S_{\text{внутр. }R}-S_{\text{внутр. }r}=\frac{\pi(R+r)^2}{2}-\frac{\pi R^2}{2}-\frac{\pi r^2}{2}=\pi Rr$$

ΔADB — прямоугольный, CD — высота, по св-ву высот прям.-го Δ-ка $CD^2=AC\cdot CB$; $a^2=4Rr \Rightarrow R\cdot r=\dfrac{a^2}{4}$

Получим $S_{арб}=\dfrac{\pi a^2}{4}\Rightarrow$ ответ

.

Ответы на олимпиадные задания по математике (УДЕ) 10 класс

1.

1. Сравните числа A и B, не пользуясь калькулятором:

$$A = 1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}; \quad B = \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}$$

Решение

Замена $a=1$, $b=\sqrt[3]{5}$, $c=\sqrt[3]{3}$

Получим $A = 1\cdot 1 - 1\cdot\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2} = a^2 - ab + b^2$

$B = 1\cdot\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{3} = ac - c^2 + bc$

Найдем $A - B = (a^2 - ab + b^2) - (ac - c^2 + bc) =$

$= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ac) =$

$= \left(\frac{a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2}\right) + \left(\frac{b^2}{2} - bc + \frac{c^2}{2}\right) + \left(\frac{c^2}{2} - ca + \frac{a^2}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] > 0$ при выбранных a, b и c

Значит, $A > B$

Ответ: первое число больше

2. Ответ: 29264. Обозначим сумму полученного кредита S. Ежегодные выплаты клиента составляли x р. В конце первого года срока погашения кредита была начислена процентная ставка в размере $1{,}2S$ р. А в тот же день в банк перевел x р. долг составляет (1,2S-x)

В конце второго года долг становится:

$$(1{,}2S - x)\cdot 1{,}2 - x = 1{,}2^2S - 1{,}2x - x = 1{,}2^2S - 2{,}2x.$$

В конце третьего года —

$$(1{,}2^2S - 2{,}2x)\cdot 1{,}2 - x = 1{,}2^3S - (1{,}2\cdot 2{,}2 + 1)x.$$

А в конце четвертого года:

$$(1{,}2^3S - (1{,}2\cdot 2{,}2 + 1)\cdot x)\cdot 1{,}2 - x \Leftrightarrow 1{,}2^4S - (1{,}2^2\cdot 2{,}2 + 1{,}2 + 1)x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1{,}2^4S - (1{,}2^2\cdot 2{,}2 + 2{,}2)x \Leftrightarrow 1{,}2^4S - (1{,}2^2 + 1)\cdot 2{,}2x \Leftrightarrow 1{,}2^4S - 2{,}44\cdot 2{,}2x.$$

Но этот долг уже равен нулю. Следовательно,

$$x = \frac{1{,}2^4\cdot 53680}{2{,}44\cdot 2{,}2} = \frac{22000\cdot 1{,}2^4}{2{,}2} = 1{,}2^4\cdot 10^4 = 12^4 = 144^2 = 20736.$$

Сейчас нетрудно вычислить и искомую сумму: $20736\cdot 4 - 53680 = 29264.$

Ответ: 29264.

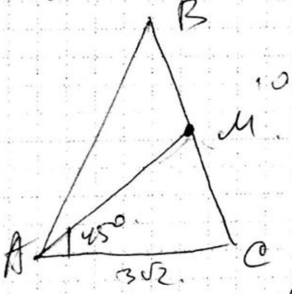
3.

Рассматриваются функции вида $y = x^2 + ax + b$, где $a + b = 2016$. Докажите, что графики всех таких функций имеют общую точку.

Решение

Заметим для всех ф-й
$y(1) = 1 + a + b = 2017$, след-но, каждый из данных графиков проходит через точку с коорд. $(1; 2017)$, ч.т.д.

В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle MAC = 45^\circ$. Решить задачу как можно большим числом способов. (Зачет начать с 3-х способов)

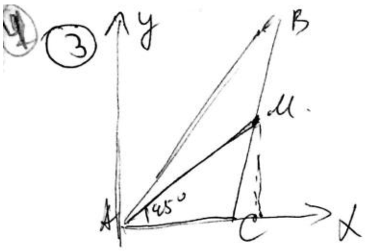


Дано: $AC = 3\sqrt{3}$
$BC = 10$
$\angle MAC = 45^\circ$
AM – медиана.

$S = ?$

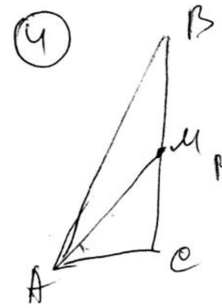
1) $\triangle AMC$: $MC = 5$ пусть $AM = x$.
по теореме косинусов
$$MC^2 = AM^2 + AC^2 - 2AM \cdot AC \cos\angle MAC$$
$$25 = x^2 + 18 - 2 \cdot x \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x^2 - 6x - 7 = 0$$
$$x_1 = -1 \quad x_2 = 7 \qquad AM = 7.$$
$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot AC \cdot \sin\angle MAC$$
$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{21}{2}$$
$$S_{ABC} = 2 S_{\triangle AMC} = 2 \cdot \frac{21}{2} = 21.$$

(3)



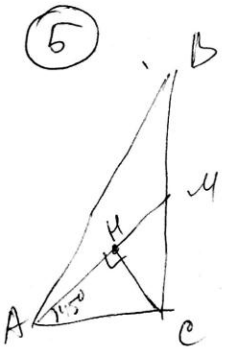
Введем систему координат.
AM — биссектриса 1-го коорд. угла.
Пусть $M(x; x)$.
$C(3\sqrt{2}; 0)$. $MC = 5$.
$(x-3\sqrt{2})^2 + (x-0)^2 = 25$.
$x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 + x^2 = 25$.
$2x^2 - 6\sqrt{2}x - 7 = 0$
$x_1 = \frac{7}{2}\sqrt{2}$ $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
и т.д.

(4)



Введем векторы:
$\vec{MC} = \vec{AC} - \vec{AM}$ (1).
$|\vec{MC}| = 5$. $|\vec{AC}| = 3\sqrt{2}$. $|\vec{AM}| = x$.
Возв. в кв. (1)
$\vec{MC}^2 = \vec{AC}^2 - 2\vec{AC}\cdot\vec{AM} + \vec{AM}^2$
$25 = 18 - 2\cdot x\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + x^2$.
$x^2 - 6x - 7 = 0$ и т.д.

(5)



Из т. C опустим ⊥ на CM.
$CH \perp AM$. ΔAHC — равнобедр.
Пусть $AH = HC = x$.
$x^2 + x^2 = 18$. $x = 3$.
Из ΔMHC по т. П находим HM
$HM = \sqrt{25-9} = 4$. $AM = 3+4 = 7$.
$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}\cdot AM\cdot CH = \frac{21}{2}$.
$S_{\Delta ABC} = 21$.

5. Решение.

а) $16 \cdot 3 = 48$, $6 + 2 = 8$ $1 + 3 = 4$.

б,в) Число $A = M - N = 2N$ чётно. Но, по условию, число A составлено из нечётных цифр и двойки. Значит, A оканчивается на 2. Поэтому вдвое меньшее число N оканчивается либо на 1, либо на 6.

Если N оканчивается на 1, то при его удвоении не происходит переноса десятка из последнего в предпоследний разряд. Значит, предпоследняя цифра числа $A = 2N$ будет чётной, а она должна быть нечётной. Противоречие.

Ответы на олимпиадные задания по математике (УДЕ) 11класс

1. Ответ: (0, +∞).

1) Заметим, что $x \neq 0$ и

$$t = \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}.$$

Так как $|x + {}^1/_x| \geq 2$, то $|t| \leq ½ < {}^{\pi}/_2$. Следовательно, аргумент t на единичной окружности лежит в I или в IV координатной четверти.

2) Если $x > 0$, то $0 < t \leq ½$, то есть t лежит в I четверти, поэтому $\sin t > 0$ и $\cos t > 0$. Кроме того, ${}^1/_t > 0$, значит, $\sin t + {}^1/_t \cos t > 0$. Таким образом, при всех $x > 0$ исходное неравенство верно.
3) Если $x > 0$, то $-1/2 \leq t < 0$, то есть t лежит в IV четверти, поэтому $\sin t < 0$ и $\cos t > 0$. ${}^1/_t < 0$, значит, $\sin t + {}^1/_t \cos t < 0$. Таким образом, при всех $x < 0$ исходное неравенство неверно.

2. Ответ: 3.
Первоначально в колбе было 2,56 л. кислорода. ($8 \cdot 0{,}32 = 2{,}56$).Предположим, что выпускали по x л. смеси. Тогда:
После первой процедуры в смеси осталось
$(2{,}56 - 0{,}32x)$
л кислорода, что составляет

$$\frac{2{,}56 - 0{,}32x}{8} \cdot 100 = \frac{256 - 32}{8} = 32 - 4x$$

образовавшейся смеси. Вновь выпустили x л. смеси.
В выпущенной смеси содержалось
$0{,}01(32 - 4x) \cdot x = (0{,}32x - 0{,}04x^2)$ л. кислорода.
В колбе осталось:

$$(2{,}56 - 0{,}32x) - (0{,}32x - 0{,}04x^2) = 2{,}56 - 0{,}32x - 0{,}32x + 0{,}04x^2 = 0{,}04x^2 - 0{,}64x + 2{,}56 \text{ л.}$$

кислорода. А этот объем составляет 12,5 % всей смеси, имеющей объем 8 л.
Решим уравнение:

$$\frac{0{,}04x^2 - 0{,}64x + 2{,}56}{8} \cdot 100 = 12{,}5 \Leftrightarrow 0{,}04x^2 - 0{,}64x + 2{,}56 = 1 \Leftrightarrow 0{,}04x^2 - 0{,}64x + 1{,}56 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 39 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 13. \end{array}\right.$$

Значение $x = 13$ не подходит по смыслу задачи.

3.

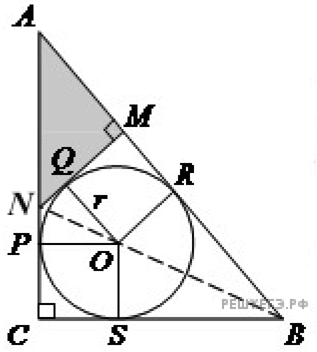
13 После урока на доске остался график функции $y = \frac{k}{x}$ и пять прямых, параллельных прямой $y = kx$ $(k \neq 0)$. Найдите произведение абсцисс всех десяти точек пересечения.

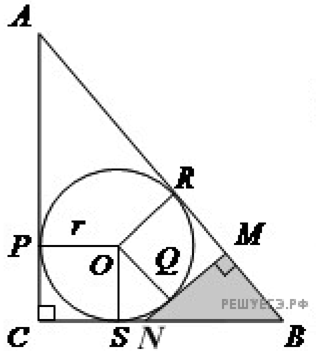
Решение.

Любая прямая, параллельная прямой $y = kx$ имеет ур-е $y = kx + b$, где b – const
Абсциссы точек пересечения графиков находятся из ур-я $\frac{k}{x} = kx + b$, $kx^2 + bx - k = 0$. По т. Виета произведение корней равно $\frac{-k}{k} = -1$.
Перемножим пять таких произведений: -1.

Ответ: -1.

4. Ответ: 25 или 32. **Решение.**





Обозначим треугольник ABC. Предположим, что отрезок NM отсекает от треугольника ABC треугольник ANM. Обозначим точки касания окружности и прямых P, Q, R, S. Так как $OQMR$ и $OPCS$ — квадраты, $MQ = PC = r$, где r — радиус окружности. Кроме того, $NQ = NP$. Значит, $NM = NC$. BN — биссектриса угла ABC. Треугольники NMB и NCB равны по гипотенузе и катету. Пусть $CB = 8x$, а $CA = 15x$. По теореме Пифагора $AB = 17x$. Тогда $AM = AB - BM = 17x - 8x = 9x$. Из подобия треугольников AMN и ACB получаем: $\frac{CB}{NM} = \frac{CA}{AM}$, откуда $\frac{8x}{40} = \frac{15x}{9x}$. Следовательно, $x = \frac{25}{3}$

Найдём радиус окружности: $r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{6x}{2} = 25$

Если отрезок отсекает треугольник *BNM*, то, рассуждая аналогично, находим, что $BM = 17x - 15x = 2x$.

Из подобия треугольников *ACB* и *NMB* получаем: $\frac{CA}{NM} = \frac{CB}{BM}$ откуда $\frac{15x}{40} = \frac{8x}{2x}$, $x = \frac{32}{3}$ Тогда

$r = 3x = 32$.

5. а) Теорема может быть доказана путём сравнения площадей треугольников. Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний треугольник, в котором h — это высота, и s — длина каждой из сторон. Точка P выбирается произвольно внутри треугольника, и тогда l, m, n — расстояния от точки P до сторон треугольника. Тогда площадь $\triangle ABC$ будет складывается следующим образом:

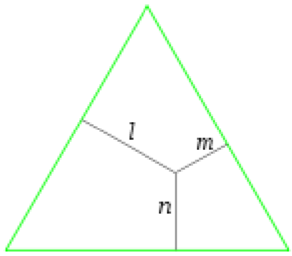
$$S(\triangle ABC) = S(\triangle ABP) + S(\triangle ACP) + S(\triangle BCP),$$

из чего вытекают следующие соотношения:

$$\frac{sh}{2} = \frac{s\ell}{2} + \frac{sm}{2} + \frac{sn}{2},$$

то есть:

$$h = \ell + m + n.$$



б) Сумма расстояний от произвольной точки внутри правильного тетраэдра до его граней равна высоте тетраэдра.

по аналогии сумма объемов четыре пирамид равна объему тетраэдра

$$\frac{sh}{3} = \frac{sx}{3} + \frac{sy}{3} + \frac{sz}{3} + \frac{st}{3}$$

h=x+y+z+t