П. М. Эрдниев

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО К ТАБЛИЦАМ «Укрупненные дидактические единицы при обучении математике в начальной и средней школе»

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1993

В действующих ныне стабильных школьных учебниках и в методических пособиях, приспособленных к ним, возможности УДЕ почти не используются.

Таблицы могут использоваться:

— при повторении и систематизации пройденного;

— при изучении нового материала.

Составляя таблицы, мы учитывали такое новое явление в современной дидактике, как фактор опережения в учебной работе.

Феномен опережения был обнаружен в известном опыте педагогов-новаторов.

Так, в опыте учительницы С. Н. Лысенковой дети уже в 3-м классе — опережая программу! — умеют складывать десятичные дроби (по программе это материал 5 — 6 классов).

В опыте учителя И. П. Волкова учащиеся 1-го класса собирают простейшие электрические цепи, а в 3-м классе овладевают проектированием формы тела на три координатные плоскости.

Для современной практики обучения особое значение приобретает то обстоятельство, что знание школьника проходит как бы три следующих уровня становления:

1. Знание-знакомство (без заучивания правил, определений, на основе показа, на уровне наглядности).

2. Знание на уровне формальной логики (определения, построения, доказательства).

3. Знание на уровне зачатков диалектической логики (в связях, переходах, в превращении и развитии понятий).

Говоря кратко, уже при первичном ознакомлении с теми или иными новыми математическими понятиями вполне оправдано обогащение понятия, окружение этого понятия родственными понятиями, сообщаемыми предварительно на «уровне знакомства», но с обязательным примечанием, что они будут подробно рассматриваться позже, в старших классах, и т. п.

В методической системе УДЕ исключительно важное значение приобретает обеспечение целостности знания.

Приведем пример.

Рассматривая понятие «биссектриса», важно научить детей на этом же уроке делить угол пополам классическими средствами (циркулем и линейкой); но этого мало: можно вызвать их удивление и усилить интерес к теме, сообщив о том, что биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке. (Соответствующая теорема будет доказана годом позже.)

Можно пойти и дальше: пусть учитель решится показать в пропедевтическом плане (разумеется, без всяких строгих заучиваемых правил), что взаимное положение двух плоскостей определяется двугранным углом, что математики пользуются понятием «биссекторная плоскость» (делящая двугранный угол пополам).

Подобные необязательные выходы за пределы фиксированных программой понятий пролагают путь в «незнаемое»; разумеется, нет смысла проверять или оценивать наличие в памяти школьников подобного ассоциативного обогащения уроков.

В перечне математических понятий, отобранных действующими программами, встречаются понятия, которые при всем терминологическом разнообразии, в сущности, обладают одним и тем же предметным содержанием.

Так, понятия «подобие (гомотетия) фигур», «коллинеарные векторы», «умножение вектора на число» встречаются школьнику в разных классах. Однако они характеризуют, вообще говоря, одно и то же геометрическое преобразование.

В таблицах всюду за исходную берется информация, заключенная в рисунке. Приоритет рисуночной информации для технологии обучения математике имеет физиологически вескую причину: современная психология установила, что именно при перекодировке знания с рисуночного на символическое (и обратно) достигается глубокое понимание вопроса.

Достоинство рисуночной информации заключается в том, что она обрабатывается преимущественно правополушарными механизмами мышления одномоментно, целостно.

Информация же, заключенная в символах, знаках, словах — это арена левополушарного мышления, для которого характерна последовательная переработка дискретной информации.

Эффективное усвоение математики возможно только при правильном сочетании обоих подходов, когда целостная образная информация, схваченная правым полушарием мозга, как бы подпитывает логическое оформление той же информации мыслительным аппаратом левого полушария.

В предлагаемых таблицах использованы специальные технологические приемы оформления математической информации, составившие конкретную рабочую базу укрупнения дидактических единиц, а именно параллельное изображение информации в форме прямых и обратных задач, «двухэтажная» запись аналогичных друг другу правил и определений и т. д.

Особенность настоящих таблиц выражается и в том, что их нельзя «измерять обычными мерками»: «Такая-то таблица служит закреплению такой-то темы программы такого-то класса». Таблицы способствуют поднятию общего уровня математического развития учащихся, воспитывают творческое мышление, определяют многоплановый подход к изучению одного и того же явления, одной и той же «дидактической единицы», вводят учащихся в обстановку самостоятельного логического мышления, глубокого проникновения в таинственный мир чисел и фигур.

Так, таблица 1, сама по себе доступная учащимся 2 — 5 классов средней школы (детям интересна эта новая форма упражнений), является как бы прелюдией к остальным таблицам серии. Бо́льшая часть пояснений к этой таблице не предназначена учащимся младших классов, но этот материал исключительно важен для математического образования учащихся 8 — 11 классов, для пробуждения у них интереса к предмету. Кроме того, содержание указанных пояснений вызовет живой интерес прежде всего у самого учителя (вряд ли ему легко удастся отыскать этот материал в каком-либо другом издании). Учитель вправе самостоятельно решать вопрос о том, в каком классе изучать данный материал (это зависит от математической подготовки класса).

Данные таблицы могут быть использованы как на уроках и факультативных занятиях в школе, так и на занятиях по методике преподавания математики (в педучилищах и на факультетах, готовящих учителей математики).

Результативное использование таблиц возможно лишь при внимательном изучении приложенных к ним описаний.

Методические рекомендации

Таблица 1. Магические фигуры

Так называемые магические квадраты — одна из древнейших задач, поражающих воображение и мышление всех начинающих изучение математики. Упражнения с «магией чисел» вызывают удивление и детей и взрослых, восхищают простыми и в то же время «таинственными» свойствами взаимных связей чисел и фигур, основных элементов математики.

Простейший магический квадрат 3x3 (постоянная сумма 15) может быть рассмотрен уже в 1-м — 2-м классах, как только дети научатся считать в пределах 20.

Работу с любой магической фигурой надо начинать с разъяснения принципа ее заполнения: сумма чисел в вертикальных, горизонтальных и диагональных рядах должна быть постоянной.

Поучителен и процесс заполнения магического квадрата числами, и проверка составленного квадрата.

Проверка состоит из двух этапов:

1) определить, все ли числа подряд (1, 2, ...) находятся внутри квадрата;

2) вычислить суммы в вертикальных, горизонтальных и диагональных рядах.

Например, для магического квадрата 3x3 эта постоянная сумма равна 15:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Излагаемый далее материал, завершающий беседу о магических квадратах, опытный учитель использует в 8 — 11 классах как в урочное время, так и на факультативных занятиях.

Приведем пример математической разминки на уроках алгебры в старших классах. Вычтем, например, из каждого числа исходного квадрата (3x3) *по 5*. Получим следующий квадрат с целыми рациональными числами, с постоянной суммой, равной нулю:

–1	+4	–3
–2	0	+2
+3	–4	+1

Такой квадрат удобен для запоминания: в нем числа, симметричные относительно центра, противоположны друг другу (-1 и +1; -2 и +2; -3 и +3; -4 и +4).

Прибавив к элементам этого квадрата по *5*, получим исходный магический квадрат.

Сделав элементы нового магического квадрата показателями степеней какого-либо основания (например, 2), можно получить магический квадрат с постоянным произведением, равным 1. (Например: $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{1}{8} = 1$ и т. п.)

2^{-1}	2^{4}	2^{-3}
2^{-2}	2^{0}	2^{2}
2^{3}	2^{-4}	2^{1}

$\longrightarrow$

$\frac{1}{2}$	16	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$	1	4
8	$\frac{1}{16}$	2

По любому магическому квадрату можно составить множество упражнений на заполнение пустых клеток.

Например, на основе квадрата 3x3 можно составить следующие «деформированные» квадраты (из 9 чисел оставляем 4 таких, чтобы по ним можно было найти оставшиеся 5 чисел):

4	9	2
3	5	7
8	1	6

→

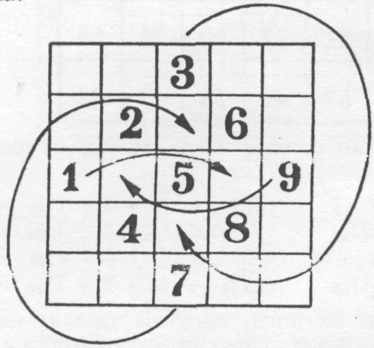
4	9	2
	1	6

→

	9	
3		7
		6

На занятиях математического кружка поучительно рассмотреть процесс составления магического квадрата; этот подход гораздо результативнее, чем упражнения по запоминанию готового квадрата.

Рассмотрим, например, как составляется магический квадрат нечетного порядка:



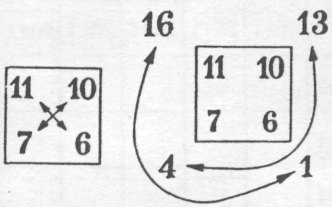
→

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Предлагаем, пользуясь этим приемом, составить магический квадрат 5-го порядка.

Процесс составления магического квадрата 4-го порядка (с постоянной суммой 34) несколько сложнее:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

На рисунке стрелками показано, что достаточно поменять местами симметричные элементы, чтобы получить в итоге искомый магический квадрат.

Удивительно достижение любителя математики фермера Адамса (США), который составил магический шестиугольник из 19 чисел; числа, расположенные в любом из трех направлений, дают постоянную сумму 38.

На решение этой задачи непосредственными пробами Адамс потратил... 50 лет! С помощью ЭВМ подобная задача, конечно, решается легко и быстро.

Математики составили «двойной магический» квадрат 8-го порядка. Его удобно записать сначала в восьмеричной системе:

17	50	43	04	32	75	66	21
31	76	65	22	14	53	40	07
00	47	54	13	25	62	71	36
26	61	72	35	03	44	57	10
45	02	11	56	60	27	34	73
63	24	37	70	46	01	12	55
52	15	06	41	77	30	23	64
74	33	20	67	51	16	05	42

Можно предложить школьникам перевести эту таблицу из восьмеричной в десятеричную систему следующим образом:

$(17)_8 = (8 \cdot 1 + 7)_{10} = (15)_{10}$ $(32)_8 = (8 \cdot 3 + 2)_{10} = (26)_{10}$

$(50)_8 = (8 \cdot 5 + 0)_{10} = (40)_{10}$ $(21)_8 = (8 \cdot 2 + 1)_{10} = (17)_{10}$

$(43)_8 = (8 \cdot 4 + 3)_{10} = (35)_{10}$ $(66)_8 = (8 \cdot 6 + 6)_{10} = (54)_{10}$

$(04)_8 = (8 \cdot 0 + 4)_{10} = (04)_{10}$ $(21)_8 = (8 \cdot 2 + 1)_{10} = (17)_{10}$

Добавив к каждому числу по единице, получим таблицу из 64 чисел такую, что сумма 8 элементов в каждой горизонтали, вертикали и диагонали равна 260, а сумма квадратов этих же чисел составляет 11 180.

Например:

$16 + 41 + 36 + 5 + 27 + 62 + 55 + 18 = 260;$

$16^2 + 41^2 + 36^2 + 5^2 + 27^2 + 62^2 + 55^2 + 18^2 = 11\ 180.$

Хватит ли у учащихся терпения только проверить составленный квадрат с помощью калькулятора?

Итак, учащиеся заполняют этот же квадрат в десятеричной системе:

15+1	40+1	35+1	04+1	26+1	61+1	54+1	17+1
25+1							
00+1							
22+1							
37+1							
51+1							45+1
42+1							
60+1	27+1						34+1

Можно предложить ученикам составить трехмерный магический куб из 3 х 3 х 3 = 27 кубиков; внутри этих кубиков помещены числа от 1 до 27 (в центре куба число 14). Если в центре магического квадрата 3 х 3 находится число *5*, то в центре магического куба находится число 14.

Сумма трех чисел в каждом из четырех направлений магического куба постоянна. Найти ее можно, применив формулу суммы членов арифметической прогрессии) при вычислении значения выражения:

$$\frac{1+2+3+...+27}{9} = \square$$

Таблица 2. Единицы длины, площади, объема (Листы 1.5[1])

Матричные (табличные) упражнения представляют относительно новое методическое средство для упрочения целостных математических представлений.

Специалисты справедливо утверждают, что матрицы (таблицы) это более хитрое изобретение ума человека, чем даже математическая формула.

Табличное представление информации имеет то достоинство, что оно подключает к запоминанию материала «визуальное мышление», т. е. зрительное восприятие взаимного расположения соответствующих знаков.

Рассматривая, скажем, соотношение 1 м^2 = 100 дм^2, мы поневоле (подсознательно) улавливаем и соотношение, расположенное в таблице рядом, например 1 м^2 = 10 000 см^2.

При этом осмысливается и тот факт, почему в правой части добавились два нуля (вероятно, потому, что 1 дм^2 = 100 см^2) и т. д.

Короче говоря, восприятие табличных данных — это всегда возникновение к о м п л е к с а суждений, ц е п и умозаключений и силлогизмов (пусть и не всегда проявляющихся во внешней (устной) речи).

Пользуясь таблицей, учитель может строить обучающий диалог, ища вместе с учащимися ответы на вопросы: «Почему?», «Что из этого следует?» и т. д.

Беседа по таблицам десятичных мер поучительна как при изучении нового материала, так и при повторении пройденного.

Данная таблица удобна при освоении процесса превращения десятичной дроби в обыкновенную и обратно.

На ее основе выгодно составлять суждения, указывая стрелкой исходное и производное равенства, например:

$$1\ \text{м} = 100\ \text{см}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{1}{100}\ \text{м} = 1\ \text{см}$$
$$\downarrow$$
$$0{,}01\ \text{м} = 1\ \text{см}$$

1			100	
$\frac{1}{100}$	**М**	=	1	**СМ**
0,01			1	

Рассуждаем так:

если в 1 м содержится 100 см, то 1 см составляет одну сотую часть метра.

Аналогично:

1			1000	
$\frac{1}{1000}$	**М**	=	1	**ММ**
0,001			1	

[1] Материал размещен на двух листах. Перед использованием таблицы их необходимо склеить

При закреплении десятичных мер длины, площади, объема полезно постоянно сравнивать эти единицы, подчеркивая генезис (происхождение) соответствующих соотношений, например:

$$1\ \text{см} = 10\ \text{мм}$$
$$1\ \text{см}^2 = 10 \times 10\ \text{мм}^2 = 100\ \text{мм}^2 = 10^2\ \text{мм}^2$$
$$1\ \text{см}^3 = 10 \times 10 \times 10\ \text{мм}^3 = 1000\ \text{мм}^3 = 10^3\ \text{мм}^3$$

Или кратко:

$$\boxed{\begin{aligned} 1\ \text{см} &= 10\ \text{мм} \\ 1\ \text{см}^2 &= 10^2\ \text{мм}^2 \\ 1\ \text{см}^3 &= 10^3\ \text{мм}^3 \end{aligned}} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} 1\ \text{мм} &= \frac{1}{10}\ \text{см} = 10^{-1}\ \text{см} \\ 1\ \text{мм}^2 &= \frac{1}{100}\ \text{см}^2 = 10^{-2}\ \text{см}^2 \\ 1\ \text{мм}^3 &= \frac{1}{1000}\ \text{см}^3 = 10^{-3}\ \text{см}^3 \end{aligned}}$$

Группы таких равенств, захватывающих единицы длины, площади и объема, запоминаются лучше, чем изолированное повторение только единиц длины или единиц площади.

Посредством этих таблиц удается ознакомить учащихся гораздо раньше, чем это предусмотрено действующими программами, со смыслом понятия «отрицательный показатель», например:

$$\boxed{\begin{aligned} 1\ \text{м}^3 &= 1000\ \text{дм}^3 \\ &\downarrow \\ 1\ \text{м}^3 &= 10^3\ \text{дм}^3 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{1}{1000}\ \text{м}^3 &= 1\ \text{дм}^3 \\ &\downarrow \\ 10^{-3}\text{м}^3 &= 1\ \text{дм}^3 \end{aligned}}$$

Рассуждение

В числе 1000 три нуля после единицы, значит, берем 10 в степени «плюс 3»:

$$1000 = 10^3$$

Рассуждение

В числе $\frac{1}{1000}$ три нуля после единицы в знаменателе, значит, берем 10 в степени «минус 3»:

$$\frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

Заметим, что эти взаимно обратные соотношения расположены в клетках таблицы, симметричных относительно главной диагонали:

$$1\ \text{дм}^3 = 10^6\ \text{мм}^3$$
$$10^{-6}\ \text{дм}^{-6} = 1\ \text{мм}^3$$

Вслед за такими упражнениями школьникам нетрудно выполнять упражнения «с окошечками», т. е. упражнения на вписывание пропущенных цифр или названий в деформированных равенствах, например:

$$3\ \text{м}\ 67\ \text{см} = \square\ \text{см}$$
$$\square\ \text{см}\ \square\ \text{мм} = 854\ \text{мм}$$
$$7\ \text{м}\ \square\ \text{см} = 739\ \text{см}$$
$$6\ \text{м}\ \square\ \text{см} = 6\frac{\square}{100}\ \text{м} = 6{,}25\ \text{м}$$

и т. п.

Вспомним здесь следующее. Всякое положительное число A можно записать так: $A = a \cdot 10^k$, где число a удовлетворяет неравенствам $1 \le a < 10$, а k — целое число. Такая запись называется записью числа в стандартном виде.

Данные таблицы удобны для восстановления необходимых знаний при операциях над числами, записанными в стандартном виде (т. е. с использованием степени десяти с целыми показателями).

Вначале такие упражнения удобно выполнять полуписьменно, причем результаты оформляются согласно правилам приведения чисел к стандартному виду, например:

У м н о ж е н и е

$a = 31 \cdot 10^5$

$b = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$

$S = a \cdot в = (31 \cdot 10^5) \cdot (0{,}8 \times 10^{-3}) = (3{,}1 \cdot 10^6) \cdot (8 \cdot 10^{-4}) = (3{,}1 \cdot 8) \cdot (10^6 \cdot 10^{-4}) = 24{,}8 \times 10^2 = 2{,}48 \cdot 10^3$

Д е л е н и е

$S = 2{,}48 \cdot 10^3$

$a = 31 \cdot 10^5$

$b = \dfrac{S}{a} = \dfrac{2{,}48 \cdot 10^3}{31 \cdot 10^5} = \dfrac{2{,}48}{31} \times 10^3 \cdot 10^{-5}$

$b = 0{,}08 \cdot 10^{-2} = 8 \cdot 10^{-4}$

Дополнением к данной таблице может служить еще одна таблица, приведенная ниже (ее учитель может изготовить сам).

Кратные (греческие) и долевые (латинские) приставки
в названиях единиц измерения физических величин

Кратные	*Долевые*
1. *«Кило»* – тысяча. Один километр – это тысяча метров: *1 км = 1000 м.* Один килограмм – это тысяча граммов: *1 кг = 1000 г.*	1. *«Милли»* – тысячная доля. Один миллиметр – это тысячная доля метра: *1 мм = 0,001 м.* Один миллиграмм – это тысячная доля грамма: *1 мг = 0,001 г.*
2. *«Гекто»* – сто. Один гектолитр – это сто литров: *1 гл = 100 л.* Один гектар («гекто–ар») – это сто аров: *1 га = 100 а.*	2. *«Центи»* (фр. *«санти»*) – сотая доля. Один сантиметр – это сотая доля метра: *1 см = 0,01 м.* Один процент (хотя «цент» в этом слове не является приставкой) – это сотая доля: *1% = 0,01.*
3. *«Дека»* – десять. Один декалитр – это десять литров: *1 дл = 10 л.* Один декаграмм – это десять граммов: *1 дг = 10 г.*	3. *«Деци»* – десятая доля. Один дециметр – это десятая доля метра: *1 дм = 0,1 м.* Один децилитр – это десятая доля литра: *1 дл = 0,1 л.*

Таблица 3. Площадь прямоугольника. Объем прямоугольного параллелепипеда.

При изучении или повторении данного материала выгодно постоянно применять противопоставление сходных правил.

Вначале следует подчеркнуть аналогию в определениях, например:

Прямоугольником называется четырехугольник, у которого угол между любыми двумя смежными сторонами прямой.	Прямоугольным параллелепипедом называется шестигранник, у которого угол между любыми двумя смежными ребрами прямой.

Затем устанавливаем число равных сторон и ребер.

Далее можно указать, что у прямоугольника две противоположные стороны равны, а у прямоугольного параллелепипеда четыре противоположных ребра равны.

Периметр прямоугольника равен удвоенной сумме двух сторон, исходящих из одной вершины.	Сумма всех ребер параллелепипеда равна учетверенной сумме трех ребер, исходящих из одной вершины.

Данные правила удобно зафиксировать совместно:

Периметр прямоугольника равен удвоенной

Сумма ребер прямоугольного параллелепипеда равна учетверенной

сумме | *двух сторон,* / *трех ребер,* *исходящих из одной вершины.*

Правила вычисления площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда также удобно запомнить совместно:

Чтобы найти | *площадь прямоугольника (S),* / *объем прямоугольного параллелепипеда (V)*, *достаточно*

перемножить | *длину и ширину,* / *длину, ширину, высоту.*

$S = a \cdot b$ Пусть в прямоугольнике длина равна 7 см, а ширина 4 см. Если в одном ряду 7 квадратных сантиметров ($см^2$), а таких рядов 4, то всего квадратных сантиметров будет $S = 7 \cdot 4 = 28$ ($см^2$)	$V = a \cdot b \cdot c$ Пусть в прямоугольном параллелепипеде длина равна 7 см, высота 4 см, а ширина 3 см. В одном бруске 7 кубических сантиметров ($см^3$); в одном слое таких брусков 3, поэтому объем слоя $V = 7 \cdot 3 = 21$ ($см^3$) Всего в параллелепипеде 4 таких слоя. Поэтому объем всего параллелепипеда $7 \cdot 3 \cdot 4 = 21 \cdot 4 = 84$ ($см^3$)

По данной таблице удобно проверить переместительный и сочетательный законы умножения.

Рассматривая прямоугольник в другом положении (заменив длину шириной и обратно), получаем:

$S = 7 \cdot 4 = 4 \cdot 7$

$S = a \cdot b = b \cdot a$

Рассматривая прямоугольный параллелепипед в другом положении, получаем:

$V = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 3 \times 7 \cdot 4$

$V = a \cdot в \cdot c = a \cdot c \cdot в = в \times a \cdot c$ и т. д.

Т а б л и ц а 4. Сложение и вычитание — действия первой ступени

Т а б л и ц а 5. Умножение и деление — действия второй ступени

При изучении сложения и вычитания в любом классе и с любыми объектами (целые числа в пределах 10, обыкновенные или десятичные дроби, многочлены или векторы) чрезвычайно важно для прочности знаний осуществить весь набор знаний, связанных с взаимно обратными действиями — сложением и вычитанием.

Совместное изучение и других взаимно обратных операций (например, умножения и деления и т. п.) потому эффективно, что при этом свойства данных операций усваиваются одно через другое, т. е. диалектически.

При изучении взаимно обратных операций полезно осуществить следующие советы по технологии оформления информации:

1. Решение пар примеров надо записывать рядом, в двух параллельных столбцах, друг против друга:

$5 + 3 = 8$	$8 - 3 = 5$
$50 + 30 = 80$	$80 - 30 = 50$
$500 + 300 = 800$	$800 - 300 = 500$

2. Следует обратить внимание учащихся на двоякую роль одного и того же числа, когда оно встречается в прямом и обратном действиях:

$$5 + 3 = 8 \qquad\qquad 8 - 3 = 5$$

Например, одно слагаемое (5) становится разностью, другое (3) — вычитаемым, а сумма (8) становится уменьшаемым.

В задании числа были известны: из восьми вычесть три.

После того как мы записали уравнение $8 - b = 5$, вычитаемое (число b) стало неизвестным, его надо найти.

Дальше в голове ученика происходит сложное переосмысливание с «известным — неизвестным» числом 3.

Если $8 - 3 = 5$, (I)

то $3 + 5 = 8$ (II)

$8 - 3 = 5$ (III)

$8 - 5 = 3$ (IV)

3. При совместном (на одном уроке) изучении сложения и вычитания становится возможным и неизбежным решение уравнений, с помощью которых находится тот или иной неизвестный компонент.

Выполняя эти простейшие преобразования равенств, не следует забывать про следующий технологический прием.

Преобразуемые равенства записываем *друг под другом.*

$8 - 3 = 5$ (I) Пример на вычитание.

$8 - b = 5$ (II) Пусть неизвестным будет вычитаемое ($b = 3$). Тогда тождество (I) превращается в уравнение (II).

$b = \ldots$ (III) Как найти неизвестное вычитаемое?

47

Вся данная четверка примеров «проигрывается» в сознании ученика, и он находит среди них комбинацию чисел (IV), которая завершается нахождением корня $b = 3$:

$8 - 5 = 3$ (IV)
$b = 8 - 5$ (V)
$b = 3$ (VI)

Описанные выше подробные преобразования равенств происходят быстро, в уме, в подсознании (вне воли ученика), ученик даже не подозревает о прошедших у него процессах, автоматических сменах равенств.

Но вслух и зримо произносятся и записываются равенства (V) и (VI), «неизвестно как появившиеся».

Указанному подсознательному процессу перебора базисных ассоциаций и связей мыслей содействует методика совместного и одновременного изучения взаимосвязанных понятий в методической системе укрупнения дидактических единиц (УДЕ).

Преобразование решенного примера в обратный — это проверенное учителями средство упрочения математического знания. При систематическом и правильном применении такого приема возникают элементы саморазвития знаний.

Вот простейшее доказательство явления саморазвития знания:

$5 + 3 =$ $= 5 + (1 + 2) =$ $= (5 + 1) + 2 =$ $= 6 + 2 = 8.$	Разбиваем второе слагаемое на 1 и 2; сначала к 5 присчитываем единицу, потом к получившейся сумме – еще 2 единицы.

Пусть вслед за данным примером предложен пример с теми же числами, но на вычитание (из суммы (8) — второго слагаемого (3)):

$8 - 3 = \ldots$ $8 - (2 + 1) =$ $= 8 - 2 - 1 =$ $= (8 - 2) - 1 =$ $= 6 - 1 = 5.$	Вычитаемое 3 «расщепляется» тоже на 1 и 2, но сначала отнимаем 2, потом уже отнимаем 1.

Аналогичное явление самовозрастания учебной информации (переход от $5 + 3$ к $8 - 3$) имеет место и в других (подобных) случаях:

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5+3}{6} = \frac{8}{6} = 1\frac{2}{6} = 1\frac{1}{3}.$$

Напишем уравнение с теми же числами:

$$\frac{5}{6} + x = 1\frac{1}{3},$$

$$x = 1\frac{1}{3} - \frac{5}{6} = (1 - \frac{5}{6}) + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Решение пар взаимно обратных примеров с одними и теми же числами — это базисное *укрупненное упражнение,* вовлекающее в единый циклический процесс взаимосвязанных операций, одна из которых подкрепляет, проявляет, корректирует другую (см. таблицу 4).

Данная методическая закономерность является общей для совместного изучения любых иных пар взаимно обратных операций (умножения и разложения на множители, возведения в степень и извлечения корня, логарифмирования и потенцирования и т. п.).

Изложенные выше психологические соображения полностью относятся к таблице 5, в которой приведена схема совместного изучения умножения и деления целых чисел.

Подобная методика по аналогии может быть перенесена и на совместное изучение умножения и деления дробей.

Рассмотрим пример:

$$4\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{14}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{9} = 3\frac{8}{9}.$$

Сделаем неизвестным второй множитель:

$$4\frac{2}{3} \cdot x = 3\frac{8}{9},$$

$$x = 3\frac{8}{9} : 4\frac{2}{3} = \frac{35}{9} : \frac{14}{3} = \frac{35 \cdot 3}{9 \cdot 14} = \frac{5}{6},$$

что и должно быть.

Таблица 6. Задачи на разностное сравнение (Листы 1, 2)[1].

Тройка задач, связанных с понятием «разностное сравнение», является основной группой простых задач, встречающихся в структуре составных арифметических и алгебраических задач.

Центральная проблема методики начальных математических знаний — это вопрос, в каком классе впервые должна предлагаться задача на разностное сравнение вида: «На сколько три больше двух?» По программам начальной школы задачи на разностное сравнение отнесены ко 2-му классу, что представляет, конечно, серьезную дидактическую ошибку, отрицательно влияющую впоследствии на качество математических знаний.

В таблице показана технология осуществления совместного изучения следующей тройки взаимосвязанных задач:

а) на увеличение числа на несколько единиц;

б) на уменьшение числа на несколько единиц;

в) на разностное сравнение.

Эту тройку задач надо составлять и решать, сохраняя общий сюжет и общий набор чисел, причем с самого начала обучения математике в 1-м классе.

Рассмотрим эту методику.

Пусть решается в качестве исходной следующая задача:

Прямая задача

В верхнем ряду 6 кубиков, в нижнем — на 2 кубика больше, чем в верхнем. Сколько кубиков в нижнем ряду?

Решение. 6 + 2 = 8 (куб.)

Ответ. В нижнем ряду 8 кубиков.

После решения прямой задачи записывается тройка чисел по условию задачи (под исходной тройкой подписываем преобразованную тройку чисел и т. д.)

---

[1]Материал размещен на двух листах. Для использования таблицы их необходимо склеить.

6, на 2, □ — прямая задача
6, на 2, 8
□, на 2, 8 — обратная задача

Чтобы составить обратную задачу, достаточно исключить одно из двух остальных чисел.

Заменив, например, число 6 клеткой, мы получаем следующую схему обратной задачи: □, на 2, 8.

Читаем условие соответствующей задачи, двигаясь по схеме справа налево.

П е р в а я   о б р а т н а я   з а д а ч а
В нижнем ряду было 8 кубиков, а в верхнем — на 2 кубика меньше. Сколько кубиков было в верхнем ряду?
Р е ш е н и е. 8 - 2 = 6 (куб.)
О т в е т. В верхнем ряду было 6 кубиков.

Решения прямой и обратной задач удобно записать в двух параллельных колонках. Это облегчает противопоставление как условий данных взаимно обратных задач, так и процессов их решения.

Увеличение на несколько единиц

П р я м а я   з а д а ч а

Читаем условие задачи по схеме слева направо

6, на 2, □.

В верхнем ряду 6 кубиков, а в нижнем – на 2 кубика больше.
Сколько кубиков в нижнем ряду?
Р е ш е н и е. 6 + 2 = 8 (куб.)
О т в е т. В нижнем ряду 8 кубиков.

Уменьшение на несколько единиц

П е р в а я   о б р а т н а я   з а д а ч а

Читаем условие задачи по схеме справа налево.

□, на 2, 8.

В нижнем ряду 8 кубиков, а в верхнем – на 2 кубика меньше.
Сколько кубиков в верхнем ряду?
Р е ш е н и е. 8 – 2 = 6 (куб.)
О т в е т. В верхнем ряду 6 кубиков.

В т о р а я   о б р а т н а я   з а д а ч а
Сначала надо написать схему второй обратной задачи, для чего второе число в известной нам тройке следует заменить клеткой:

6, □, 8.

Читаем условие новой задачи по данной схеме:
«В верхнем ряду 6 кубиков, а в нижнем — 8 кубиков.
На сколько кубиков в верхнем ряду меньше, чем в нижнем?» (Или: «На сколько кубиков в нижнем ряду больше, чем в верхнем?»)
Р е ш е н и е. 8 - 6 = 2 (куб.)
О т в е т. В верхнем ряду на 2 кубика меньше, чем в нижнем.

О дискуссии по поводу разностного сравнения

Авторы действующих учебников математики для 1-го класса (М. И. Моро и С. В. Степанова) отнесли решение задач на разностное сравнение ко 2-му классу, мотивируя это тем, что задачи на разностное сравнение представляют бо́льшую трудность для ребят, чем логически связанные с ними задачи на увеличение (уменьшение) числа на несколько единиц.

Правдой здесь является то, что действительно задачи на разностное сравнение для малышей труднее, чем задачи на увеличение (уменьшение) числа на несколько единиц. Но «трудности» эти вызваны в свою очередь традиционной методикой *раздельного* изучения взаимосвязанных задач. В методических исследованиях нами твердо установлено следующее: при обучении по системе укрупнения дидактических единиц (УДЕ) (а именно при применении описанной выше методики преобразования прямой задачи в обратные) «сравнительная трудность» обратной задачи как бы исчезает. Срабатывает закон диалектики: одно познается через свое — другое.

В чем же здесь дело?

Благодаря преобразованиям задачи в обратные — согласно требованиям УДЕ — вся тройка задач (на увеличение, уменьшение, а также на разностное сравнение) осваивается как некое триединство, причем любая из трех задач является как бы равноправным представителем двух других задач.

При методической системе УДЕ если понято и усвоено решение одной из этих трех задач, то тем самым гарантируется понимание и решение двух других, производных от нее (с тем же сюжетом и тем же набором числовых данных).

Тройка задач, связанная с разностным сравнением чисел, — это *базисные задачи для всей математики*, и потому применение описанной выше методики имеет столь ценные отдаленные последствия.

Выше мы обсуждали случай, когда сначала в качестве исходной, прямой задачи решается задача вида, называемого «задачами на увеличение числа на несколько единиц».

Затем она преобразуется в задачу на уменьшение на столько же единиц. И т. д.

После определенной практики можно практиковать и иной порядок построения тройки задач.

Пусть сначала решена следующая задача:

«Мише 9 лет, Нина на 3 года младше. Сколько лет Нине?»

Р е ш е н и е. 9 − 3 = 6.

Пишем схемы задач — решенной и двух обратных:

9, на 3, □ (прямая задача)
□ , на 3, 6 (первая обратная задача)
9, □ , 6 (вторая обратная задача)

(Под схемой прямой задачи записываем схемы обратных задач).

П е р в а я о б р а т н а я з а д а ч а

□ , на 3, 6

«Нине 6 лет, она на 3 года младше Миши. Сколько лет Мише?»

Обычно в условии обратной задачи используют слово-антоним: если Миша *старше* Нины, то Нина *младше* Миши (на столько же лет).

Условие обратной задачи выглядит так:

«Нине 6 лет, а Миша на 3 года старше. Сколько лет Мише?»

Р е ш е н и е. 6 + 3 = 9.

О т в е т. Мише 9 лет.

В т о р а я о б р а т н а я з а д а ч а

9, □ , 6

«На сколько лет Миша старше Нины?» Или: «На сколько Нина младше Миши?»

Т а б л и ц а 7. Задачи на кратное сравнение

Тройка задач, связанных с понятием «кратное сравнение», аналогична по конструкции и приемам решения тройке задач на разностное сравнение.

Данную тройку задач выгодно рассматривать как единую тему (в качестве укрупненного блока знаний) в самом начале работы над действиями второй ступени — умножением и делением.

В таблице показана технология решения данной тройки задач, причем — это главное — также посредством преобразования одной из решенных задач в обратные.

Осуществляем такую последовательность преобразований:

а) увеличение числа в несколько раз;

б) уменьшение числа в несколько раз;

в) кратное сравнение чисел.

Пусть решена в качестве исходной следующая задача:

«В верхнем ряду 6 кубиков, в нижнем — в 2 раза больше, чем в верхнем. Сколько кубиков в нижнем ряду?»

Решение. 6 • 2 = 12 (куб.)

Ответ. В нижнем ряду 12 кубиков.

Записываем схемы прямой и двух обратных задач.

6,	в 2 раза,	□	(прямая задача)
6,	в 2 раза,	12	(прямая задача)
□ ,	в 2 раза,	12	(первая обратная задача)
6,	□ ,	12	(вторая обратная задача)

Составим условие первой обратной задачи с тем же сюжетом и теми же числами:

□ , в 2 раза, 12.

«В нижнем ряду 12 кубиков, а в верхнем — в 2 раза меньше. Сколько кубиков в верхнем ряду?»

Решение. 12 : 2 = 6 (куб.)

Ответ. В верхнем ряду 6 кубиков.

В методическом отношении удобно как условия, так и решения взаимно обратных задач записывать рядом в двух параллельных колонках.

Увеличение в несколько раз

Прямая задача

Читаем условие задачи по схеме слева направо.

6, в 2 раза, □ .

В верхнем ряду 6 кубиков, а в нижнем – в 2 раза *больше.*

Сколько кубиков в нижнем ряду?

Решение. 6 • 2 = 12 (куб.).

Ответ. В нижнем ряду 12 кубиков.

Уменьшение в несколько раз

Первая обратная задача

Читаем условие задачи по схеме справа налево.

□ , в 2 раза, 12.

В нижнем ряду 12 кубиков, а в верхнем — в 2 раза *меньше.*

Сколько кубиков в верхнем ряду?

Решение. 12 : 2 = 6 (куб.).

Ответ. В верхнем ряду 6 кубиков.

Вторая обратная задача

Сначала надо написать схему второй обратной задачи, для чего второе число в известной нам тройке чисел следует заменить клеткой:

6, □ , 12.

Читаем по этой схеме условие новой задачи:

«В верхнем ряду 6 кубиков, а в нижнем — 12 кубиков. Во сколько раз в верхнем ряду меньше кубиков, чем в нижнем?»

Решение. 12 : 6 = 2.

Ответ. В верхнем ряду в 2 раза меньше кубиков, чем в нижнем.

Тройка задач, связанная с понятием «кратное сравнение», представляет базисный комплекс знаний в изучении математики.

Эта тройка задач связана с различением в математике следующих понятий: *деление по содержанию* и *деление на равные части.*

Так, при кратном сравнении совершается деление по содержанию.

З а д а ч а. У Коли было 12 р. На эти деньги он купил тетради, по 3 р. каждая. Сколько тетрадей купил Коля?

Р е ш е н и е. 12 р. : 3 р. = 4 (тетр.). (3 *содержится* в 12 р. 4 раза.)

О т в е т. Коля купил 4 тетради.

Составим теперь обратную задачу по схеме (по тому же сюжету):

12, □, 4.

«У Коли было 12 р. На эти деньги он купил 4 одинаковые тетради. Сколько стоит одна тетрадь?»

Р е ш е н и е. 12 : 4 = 3 (р.). (12 р. *разделить поровну* на 4 части.)

О т в е т. Одна тетрадь стоит 3 р.

Т а б л и ц а 8. Взаимно обратные задачи (в 2 действия)

Технология совместного изучения сложения и вычитания, а также умножения и деления показана в таблицах 4, 5, 6, 7.

Совместное изучение взаимно обратных действий делает возможным обновление методики изучения задач посредством решения групп взаимосвязанных задач, составляющих целостную единицу знания.

В таблицах 6 и 7 подробно показан процесс преобразования простой задачи в обратную (в одно действие).

Учителя, использующие на своих уроках этот методический прием, называют данный подход кратко «методом обратной задачи».

При грамотном использовании данного приема вполне целесообразно (и это посильно детям!) уже в 1-м классе научить преобразованию *любой задачи* в одно действие в обратную ей и познакомить таким образом детей с формами контрастных мыслей.

Это требование вполне достойно того, чтобы войти в программу обязательным требованием к обучению.

Следуя данной линии активного обучения, столь же доступно и целесообразно добиться от школьника умения в последующих классах преобразовывать задачу в 2 — 3 действия в обратную и решать тем самым группы задач в постоянном противопоставлении родственных суждений.

Пусть решается следующая задача:

«Купили 3 пенала по цене 20 р. и книгу за 15 р. Сколько стоит вся покупка?»

Р е ш е н и е.

1) 20 • 3 = 60 (р.)

2) 60 + 15 = 75 (р.)

О т в е т. За всю покупку заплатили 75 р.

После решения прямой задачи сразу надо составить схему решенной задачи в виде строки чисел:

20, 3, 15, □

20, 3, 15, 75

В схеме записываются только числа, содержащиеся в условии задачи. Искомое число вначале удобно отметить клеткой.

После того, как ответ найден (75), он записывается вместо клетки.

Начинающие учителя часто допускают ошибку, включая в условие обратной задачи числа, получаемые в промежуточных выкладках при решении задач. Так, в рассматриваемом случае в схему прямой задачи (или в условие обратной задачи) нельзя включать ответ первого действия (число 60).

Сделав неизвестным какое-либо число из данных в схеме, мы получаем схему соответствующей обратной задачи.

Например, сделав искомым число 20 (стоит на первом месте схемы), мы получаем обратную задачу, условие которой должно удовлетворять схеме:

□ , 3, 15, 75.

«Купили 3 одинаковых пенала и еще книгу за 15 р. Вся покупка стоит 75 р. Сколько стоит пенал?»

Р е ш е н и е.

1) 75 − 15 = 60 (р.)

2) 60 : 3 = 20 (р.)

О т в е т. Пенал стоит 20 р.

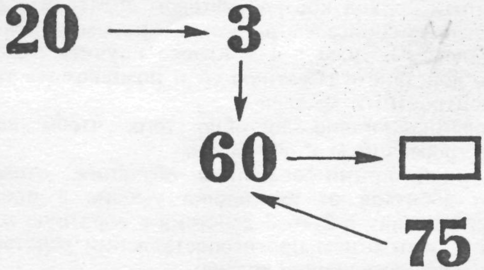
Решения взаимно обратных задач поучительно представить в общей граф-схеме.

В таблице показаны в одной граф-схеме решения двух взаимно обратных задач. Решение прямой задачи представлено цепью сплошных стрелок, а решение обратной задачи — пунктирными стрелками.

Ответ прямой задачи (75 р.) заключен в прямоугольник, а ответ обратной задачи — в треугольник.

Предлагаем читателю рассказать решение второй обратной задачи по схеме:

20, 3, □, 75



Подобные задания на составление задач следует включать в содержание контрольных и экзаменационных работ по математике.

Такие задания позволяют проверить уровень владения сложными формами мышления.

Т а б л и ц а 9. Задачи на среднее арифметическое

При изложении темы «Среднее арифметическое» в школьных учебниках обычно ограничиваются задачами самого простого вида, например:

«Три рабочих разной квалификации обматывали трубы изоляционным материалом. Первый обмотал за смену 5 м, второй — 9 м, третий — 4 м. Сколько метров трубы обмотал в среднем один рабочий?»

Р е ш е н и е.

1) Сколько всего метров трубы обмотали три рабочих вместе?

5 м + 9 м + 4 м = 18 м

2) Сколько метров обмотал в среднем один рабочий?

18 м : 3 = 6 м

Выгодно тут же преобразовать решенную задачу в обратную и записать их решения рядом друг с другом.

Прямая задача	Обратная задача
5, 9, 4, □ .	□ , 9, 4, 6.
Решение.	Решение.
$\frac{5+9+4}{3} = 6$ (м)	1) $6 \cdot 3 = 18$ (м) 2) $9 + 4 = 13$ (м) 3) $18 - 13 = 5$ (м)
Ответ. Один рабочий в среднем обмотал 6 м трубы.	Ответ. Первый рабочий обмотал 5 м трубы.

Наиболее поучительны в данной теме задачи на нахождение средней скорости, средней цены и т. п.

Рассмотрим следующую задачу:

«Купили для фруктовой смеси 7 кг сушеных яблок, по 60 р. за килограмм, и 3 кг сушеных груш, по 80 р. за килограмм.

Найти цену 1 кг фруктовой смеси».

Решение.

1) На какую сумму купили яблок?

$$60 \cdot 7 = 420 \text{ (р.)}$$

2) На какую сумму купили груш?

$$80 \cdot 3 = 240 \text{ (р.)}$$

3) Сколько стоит вся покупка?

$$420 + 240 = 660 \text{ (р.)}$$

4) Сколько на эту сумму всего купили фруктов?

$$7 + 3 = 10 \text{ (кг)}$$

5) Какова цена 1 кг смеси?

$$660 : 10 = 66 \text{ (р.)}$$

Ответ. Цена 1 кг смеси 66 р.

Решение задачи удобно изобразить в виде граф-схемы (см. таблицу).

После решения прямой задачи записываем схемы прямой и обратных к ней задач друг под другом:

60, 7, 80, 3, □ (прямая задача)
□ , 7, 80, 3, 66 (первая обратная задача)
60, □ , 80, 3, 66 (вторая обратная задача)
60, 7, □ , 3, 66 (третья обратная задача)

В таблице (правая колонка) показано решение первой обратной задачи, в которой искомым числом является цена яблок (60 р.).

Аналогично решается третья обратная задача, в ней искомое число — цена груш (80 р.).

Составим вторую обратную задачу:

«Купили несколько килограммов яблок по 60 р., 3 кг груш по 80 р., причем цена смеси оказалась 66 р. Сколько купили яблок?»

Арифметическое решение данной задачи весьма непростое.

Решим ее с помощью составления уравнения.

	Цена	Количество	Стоимость
Яблоки	60	x	$60 \cdot x$
Груши	80	3	$80 \cdot 3$
Всего		$x + 3$	$(x + 3) \cdot 66$

Составляем уравнение:

$$60\,x + 80 \cdot 3 = (x + 3) \cdot 66.$$

Учащиеся заканчивают решение.

При изучении данной темы можно предложить школьникам составить и рассказать условие аналогичной задачи на среднее арифметическое по заданной граф-схеме решения, в которой записаны лишь некоторые числа:

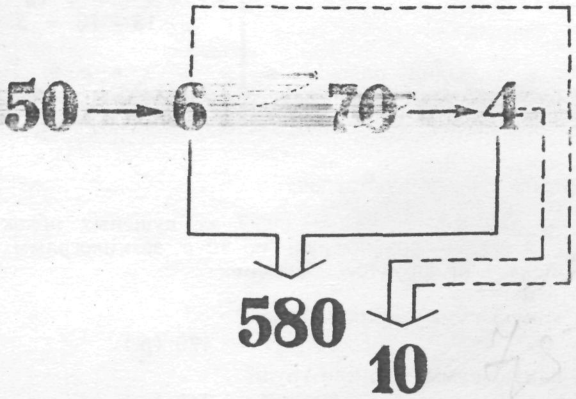


Таблица 10. Переместительный закон

Таблица 11. Сочетательный закон

Таблица 12. Распределительный закон

В этих таблицах тремя способами показана сущность основных законов (свойств) арифметических действий: переместительного (коммутативного), сочетательного (ассоциативного) и распределительного (дистрибутивного).

Смысл этих законов сначала объясняется на простом рисунке (рисуночный код), затем указанная мысль конкретизируется на числах и, наконец, фиксируется в символической (буквенной) форме.

В зависимости от того, в каком классе изучается или повторяется то или иное из этих свойств, все доступные формулировки рассматриваются одновременно.

Так, переместительный закон выгодно иллюстрировать как в том случае, когда слагаемые — целые числа, так и для того случая, когда слагаемые — дробные числа.

При изучении переместительного закона интересно выполнять упражнения на восстановление пропущенных чисел в равенствах:

$\square + 24 =$	**100**	$\square \cdot 25 =$	**100**
$76 + \square =$		$4 \cdot \square =$	

Рассматривая сочетательный закон умножения, также удобно использовать различные иллюстрации.

Сравним следующие два рассуждения (табл. 11).

Сочетательный закон сложения

Имеются три слагаемых:

5; 7; 3.

Среднее слагаемое можно прибавить как к первому слагаемому:

Сочетательный закон умножения

Рассмотрим выражения:

$(4 \cdot 2) \cdot 3 =$

$4 \cdot (2 \cdot 3) =$

Верхнее произведение

$5 + 7 + 3 =$
$= (5 + 7) + 3 =$ (слагаемые)
$= 12 + 3 =$
$= 15,$ (сумма)

так и к третьему:

$5 + 7 + 3 =$ (слагаемые)
$= 5 + (7 + 3) =$
$= 5 + 10 =$
$= 15.$ (сумма)

В обоих случаях общие суммы равны 15:

$(5 + 7) + 3 =$
$5 + (7 + 3) =$ **15**

$(4 \cdot 2) \cdot 3$
означает:
имеются 4 группы клеток, в каждой по 2 ряда, всего рядов $4 \cdot 2 = 8$.
В каждом ряду по 3 клетки, всего клеток $(4 \cdot 2) \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$.
Нижнее произведение
$4 \cdot (2 \cdot 3) =$
означает следующее:
имеются 3 группы клеток, отделенные вертикальными черточками; в каждой группе по 2 ряда клеток, всего рядов $2 \cdot 3 = 6$.
В каждом ряду 4 клетки, всего клеток $4 \cdot (2 \cdot 3) = 4 \times 6 = 24$.
Итак $(4 \cdot 2) \cdot 3 =$
$4 \cdot (2 \cdot 3) =$ **24**

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Сочетательный закон умножения возможно также иллюстрировать на примере вычисления объема прямоугольного параллелепипеда.

«Переворачивая» параллелепипед, основанием его можно сделать любую грань.

Для детей интересно выполнение упражнений по восстановлению деформированных равенств; такое задание выполняется на основе применения переместительного и сочетательного законов сложения и умножения.

В таблице 12 показано содержание распределительного закона умножения и деления на одном рисунке. На нем изображены два сомкнутых прямоугольника с общей высотой, равной 2 единицам.

Площадь первого прямоугольника равна произведению $5 \cdot 2$, а площадь второго (заштрихованного) — произведению $3 \cdot 2$.

Сложим их: $5 \cdot 2 + 3 \cdot 2$.

Геометрический смысл данной суммы таков: находим площадь прямоугольника, состоящего из двух меньших прямоугольников; у большого прямоугольника длина равна $5 + 3$, а ширина та же.

Заменив конкретные числа буквами, получим запись распределительного закона в общем виде:

$$(5 + 3) \cdot 2 = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2,$$
$$(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x.$$

Изучая алгебру, удобно воспользоваться таким же рисунком для вывода правил взаимно обратных операций.

$$\overrightarrow{2(a + b) = a \cdot 2 + b \cdot 2.}$$

Читаем равенство слева направо:

Чтобы умножить многочлен на одночлен, достаточно умножить каждый его член на этот одночлен и полученные произведения сложить.

Читаем равенство справа налево:

Если все слагаемые имеют один и тот же общий множитель, то его можно вынести за скобки.

Пользуясь распределительным законом умножения (деления) применительно к вычитанию, удается выполнять устно и (быстро!) умножение и деление дробей, близких к целым числам.

В подобных случаях письменные преобразования выражений выгодно располагать друг под другом.

Умножение	Деление
$5\frac{19}{20} \cdot 3 =$	$17\frac{17}{20} : 3 =$
$= (6 - \frac{1}{20}) \cdot 3 =$	$= (18 - \frac{3}{20}) : 3 =$
$= 6 \cdot 3 - \frac{1}{20} \cdot 3 =$	$= 18 : 3 - \frac{3}{20} : 3 =$
$= 18 - \frac{3}{20} =$	$= 6 - \frac{1}{20} =$
$= 17\frac{17}{20}$.	$= 5\frac{19}{20}$.

Таблица 13. Когда не изменяется сумма? произведение?

В данной таблице снова показана аналогия между свойствами сложения и умножения.

Сравнение таких сходных правил позволяет школьнику прочно усвоить это условие постоянства суммы (произведения).

Постоянство суммы

Первое слагаемое 5, второе слагаемое 4, сумма 9. Отнимем от первого слагаемого 2, получим новое слагаемое 3. Прибавим столько же единиц ко второму слагаемому (новое слагаемое 6), получим ту же сумму 9 для новых слагаемых.	$5 + 4 = 9$ $(5 - 2) + (4 + 2) =$ $3 + 6 =$	**9**

Постоянство произведения

Первый множитель 6, второй 4, произведение 24. Уменьшим первый множитель в 2 раза (получим новый множитель 3), а второй множитель увеличим во столько же раз (получим новый множитель 8). В итоге получим то же произведение 24.	$6 \cdot 4 = 24$ $(6 : 2) \cdot (4 \cdot 2) =$ $3 \cdot 8 =$	**24**

На оба свойства поучительно решить соответствующие несложные задачи.

З а д а ч а 1.

«В автобусе ехало 20 женщин и 10 мужчин. На остановке из него вышли 3 женщины и вошло столько же мужчин. Сколько человек поехало дальше?»

Изменилась ли сумма? Почему?

$20 + 10 =$

$(20 - 3) + (10 + 3) =$ **30**

$17 + 13 =$

З а д а ч а 2

«В первый день на сборе картофеля работало 40 школьников, которые собрали по 20 кг картофеля. Во второй день вместо них приехали студенты, которых было в 2 раза меньше, чем школьников (40 : : 2 = 20), но каждый студент собирал в день в 2 раза больше школьника (20 · 2 = 40). Сколько картофеля собрали студенты?»

Изменился ли общий сбор картофеля? Почему?

$40 \cdot 20 =$

$(40 : 2) \cdot (20 \cdot 2) =$ **800**

$20 \cdot 40 =$

Итак, если *одно из слагаемых / один из множителей* *увеличить* *на несколько единиц / в несколько раз*,

а *другое / другой* *уменьшить* *на столько же единиц / во столько же раз*, *то числовое значение*

суммы / произведения *не изменится.*

Т а б л и ц а 14. Задачи на движение (навстречу)

Одним из главных средств эффективного обучения решению арифметических задач является так называемый метод составления и решения обратных задач.

Если ученик усвоил этот простой и доступный прием, этот факт можно считать серьезным достижением в логическом развитии школьника.

Пусть решается следующая задача:

«Расстояние между двумя велосипедистами А и Б 200 м. Начав движение одновременно, они движутся навстречу друг другу со скоростями 6 м/с и 4 м/с. Через сколько секунд они встретятся?».

Р е ш е н и е.

1) На сколько метров сближаются велосипедисты за каждую секунду?

$$6 + 4 = 10 \text{ (м)}$$

2) Через сколько секунд велосипедисты встретятся?

$$200 : 10 = 20 \text{ (с)}$$

О т в е т. Велосипедисты встретятся через 20 с.

После решения прямой задачи записываем схему решенной задачи в виде последовательности чисел, имеющихся в условии задачи.

Схема заканчивается числом, найденным в результате ее решения.

Схема прямой задачи выглядит так:

6, 4, 200, □

6 м/с, 4 м/с, 200 м, 20 с.

Удобно также составить граф-схему решенной задачи в виде чисел, соединенных стрелками. Граф-схема заканчивается числом 20, найденным в результате решения задачи (записано внутри клетки).

Граф-схема решения прямой задачи показана сплошными стрелками.

Обратная задача составляется с помощью следующего приема.

В схеме прямой задачи, состоящей из четырех чисел (6, 4, 200, 20), заменим первое число каким-либо знаком, например треугольником:

6, 4, 200, 20 (прямая задача)

△, 4, 200, 20 (обратная задача).

По записанной схеме читаем условие обратной задачи: к каждому из трех записанных чисел составляем соответствующее предложение, а к искомому числу, обозначенному треугольником, составляем вопросительное предложение (вопрос задачи).

«Расстояние между велосипедистами А и Б 200 м. Двигаясь навстречу друг другу, они встретились через 20 с, причем скорость одного из них была равна 4 м/с. Какова была скорость другого велосипедиста?»

Решение.

1) На сколько метров сближались велосипедисты за каждую секунду?

$$200 : 20 = 10 \text{ (м)}$$

2) Какова была скорость второго велосипедиста?

$$10 - 4 = 6 \text{ (м/с)}$$

Ответ. Скорость второго велосипедиста 6 м/с.

Решение обратной задачи можно изобразить в одной граф-схеме вместе с решением прямой задачи.

При этом, чтобы различать последовательность рассуждений, удобно связь чисел в условии обратной задачи изобразить штриховыми стрелками. (Решение прямой задачи нами изображалось сплошными стрелками.)

Учащимся интересно составить вторую обратную задачу по другой граф-схеме, в которой те же самые числа связаны друг с другом уже иной цепью стрелок (6, 4, ◊, 20).

Учащимся предлагается рассказать условие второй обратной задачи с вопросом: «Каково было первоначальное расстояние между велосипедистами?»

Таблица 15. Задачи на движение (вдогонку)

Если на рисунке к предыдущей задаче изменить направление движения велосипедиста Б на противоположное, то получится задача на движение вдогонку.

«Первоначальное расстояние между велосипедистами А и Б было равно 200 м. Движение они начали одновременно. Велосипедист А догоняет велосипедиста Б со скоростью 6 м/с. У велосипедиста Б скорость составляет 4 м/с. Через сколько секунд велосипедист А догонит велосипедиста Б?»

Решение.

1) На сколько метров велосипедист А приближается к велосипедисту Б за каждую секунду?

$$6 - 4 = 2 \text{ (м)}$$

2) Через сколько секунд велосипедист А окажется рядом с велосипедистом Б (догонит его)?

$$200 : 2 = 100 \text{ (с)}$$

Ответ. Велосипедист А догонит велосипедиста Б через 100 с.

Затем составляем схему решенной прямой задачи.

6, 4, 200, 100 (прямая задача)

6, 4, △ , 100 (обратная задача).

К каждому числу схемы обратной задачи составляем соответствующее предложение:

«Велосипедист А движется вслед за велосипедистом Б, причем движение начали одновременно. Скорость первого велосипедиста 6 м/с, а скорость второго — 4 м/с. Велосипедист А догнал велосипедиста Б через 100 с. Каково было первоначальное расстояние между велосипедистами?»

Р е ш е н и е.

1) На сколько метров приближается первый велосипедист ко второму за 1 с?

$$6 - 4 = 2 \text{ (м)}$$

2) Каково было первоначальное расстояние между велосипедистами?

$$2 \cdot 100 = 200 \text{ (м)}$$

О т в е т. Первоначально между велосипедистами было 200 м.

Можно также предложить учащимся составить вторую обратную задачу по граф-схеме.

Т а б л и ц а 16. Четверка задач на движение

Весьма поучительно решение следующей четверки задач, исчерпывающих все возможные комбинации направлений движения двух тел друг относительно друга (навстречу или вдогонку).

Вопрос для всех задач общий: «Через сколько секунд А и Б окажутся рядом?»

Итак, з а д а ч а:

«Между двумя точками имеются две дороги: длинная в 1600 м и короткая в 800 м. Из этих точек движутся два велосипедиста (А и Б) со скоростями 5 м/с и 3 м/с. Через сколько секунд они окажутся рядом?» (Рассмотреть все возможные случаи.)

Решение задачи удобно изобразить в таблице с двумя «входами». При таком оформлении информация о направлении движения передается на нескольких кодах.

Так, по горизонтальному входу показаны скорости велосипедиста А, по вертикальному входу показаны скорости велосипедиста Б. Числовые значения этих скоростей не меняются (модули постоянные). Эти скорости изображены схематически в клетках таблицы.

По схемам удобно проводить *обучающую беседу*, позволяющую добыть дополнительную информацию об изучаемом.

У ч и т е л ь. В каких клетках изображено движение велосипедистов в противоположных направлениях («навстречу»)?

Д е т и. Движение «навстречу» изображено в клетках диагонали II — III.

У ч и т е л ь. В каких клетках изображено движение в одном направлении («вдогонку»)?

Д е т и. Движение «вдогонку» изображено в клетках диагонали I — IV.

У ч и т е л ь. Сравните задачи I и IV. В каком из этих случаев один велосипедист быстрее догонит другого? Почему?

Д е т и. В I случае, так как тогда первоначальное расстояние между велосипедистами 800 м, в IV же случае уже 1600 м.

Решения четырех задач даны в клетках таблицы.

Мы описали беседу, основанную на качественных сравнениях: (I — II), (II — III), (II — IV).

Однако в обсуждении задачи можно пойти дальше, проникая в глубинные связи, которые при обычной практике обучения на основе одинарных задач являются для мышления школьника недоступными. Дополнительным обсуждением можно извлечь новые сведения о движении двух тел — одного относительно другого.

У ч и т е л ь. Какова скорость сближения велосипедистов в I и IV случаях?

Д е т и. Скорости сближения равные, так как в обоих случаях движения совершаются вдогонку. Скорость сближения здесь равна $5 - 3 = 2$ (м) за каждую секунду.

У ч и т е л ь. Через сколько секунд произойдет первая встреча в I и IV задачах?

Д е т и. $800 : 2 = 400$ (с), $1600 : 2 = 800$ (с).

У ч и т е л ь. Через сколько секунд будут происходить последующие встречи? Через различное или одно и то же время? Почему?

Д е т и. После первой встречи условия задач оказываются одинаковыми: в обоих случаях «быстрейший» должен нагнать «медленного» велосипедиста через $(1600 + 800) : 2 = 2400 : 2 = 1200$ (с).

У ч и т е л ь. Почему же здесь расстояние возросло до $1600 + 800 = 2400$ м?

Д е т и. Потому что между данными двумя велосипедистами в момент встречи расстояние равно нулю (0 м). Однако при дальнейшем движении между ними оказывается весь круговой путь ($1600 + 800 = 2400$).

У ч и т е л ь. Через сколько секунд будут происходить последующие встречи во II и III задачах?

О т в е т. $(1600 + 800) : (5 + 3) = 2400 : 8 = 300$ (с).

У ч и т е л ь. Какова же скорость сближения велосипедистов во II и III задачах?

Д е т и. За каждую секунду велосипедисты будут сближаться на $5 + 3 = 8$ (м).

В этом случае скорости складываются, так как происходит встречное движение.

У ч и т е л ь. Через сколько секунд встретятся они во II задаче? В III задаче?

Д е т и. $800 : 8 = 100$ (с).
$1600 : 8 = 200$ (с).

У ч и т е л ь. Через сколько секунд будут повторяться последующие встречи во II и III задачах?

Д е т и. Дальнейшие встречи будут происходить через равные промежутки времени: $(1600 + 800) : 8 = 300$ (с).